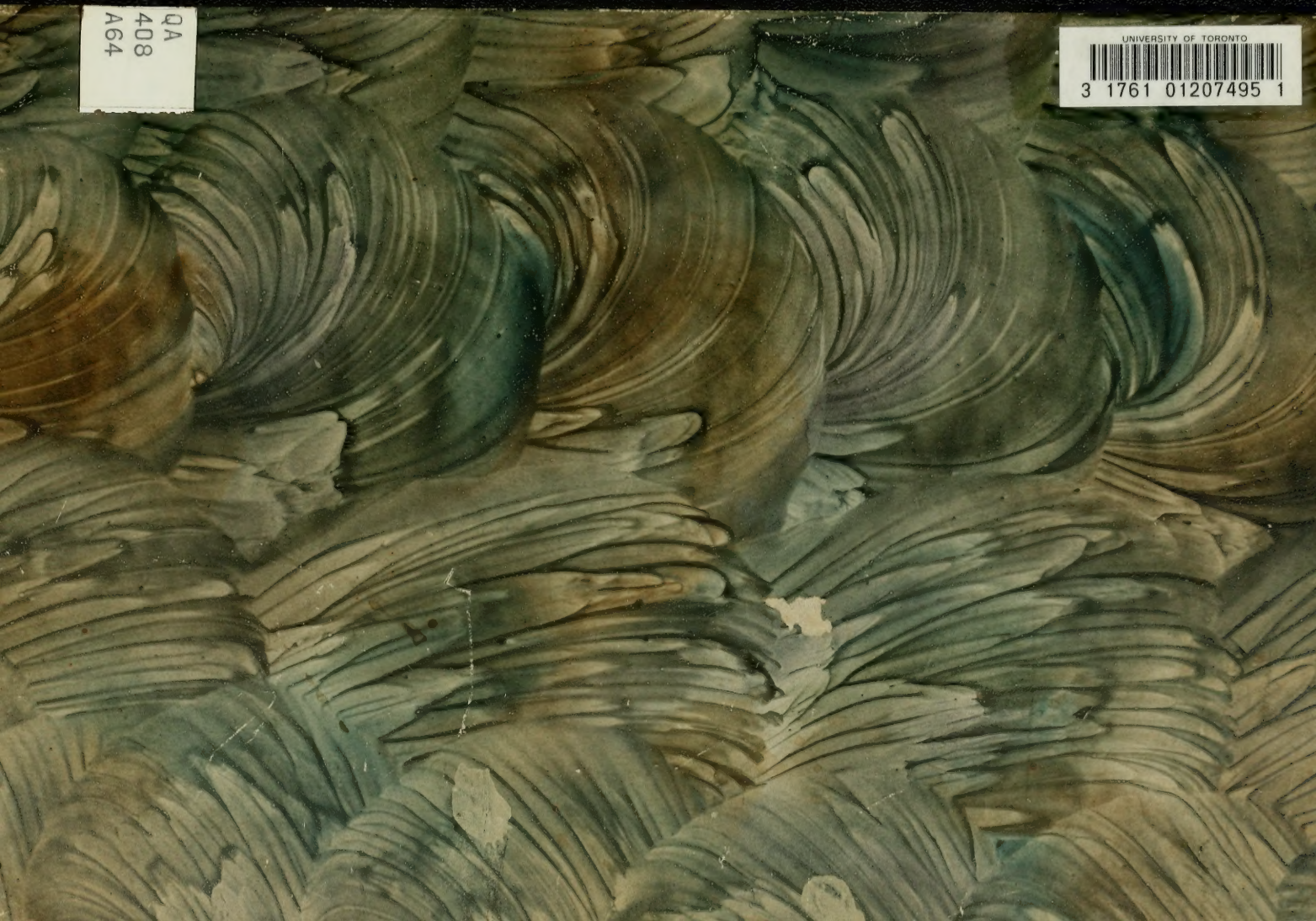

QA
408
A64

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01207495 1

SECHSSTELLIGE TAFELN

DER

BESSEL'SCHEN FUNKTIONEN IMAGINÄREN ARGUMENTES

VON

PROF. DR. E. ANDING
DIREKTOR DER HERZOGLICHEN STERNWARTE ZU GOTHA

322243
M. 12. 35

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1911

ALLE RECHTE, AUCH DER HERAUSGABE IN ANDERER SPRACHE, VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1911 BY WILHELM ENGELMANN, LEIPZIG.

QA
408
A64

Printed in Germany

Inhalt.

Seite

Vorbemerkung IV
I. Allgemeines 1
II. L_0 und L_1 unterhalb $x = 10$ 8
III. L_0 oberhalb $x = 10$ 10
IV. L_1 » $x = 10$ 19
V. Anordnung, Abstufung und Genauigkeit 24

Tafeln.

$\log L_0(x)$ und $\log \frac{1}{x} L_1(x)$

in Intervallen $= 0.01$ von $x = 0$ bis $x = 10$ 28

$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_0(x)$	$\log \sqrt{x} L_0(x)$	$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_1(x)$	$\log \sqrt{x} L_1(x)$

in Intervallen = 0.1 von $x =$ 10 bis $x =$ 50 45
» » = 1 » $x =$ 50 » $x =$ 200 59
» » = 10 » $x =$ 200 » $x =$ 1 000 65
» » = 100 » $x =$ 1 000 » $x =$ 5 000 68
» » = 1 000 » $x =$ 5 000 » $x =$ 20 000 70
» » = 10 000 » $x =$ 20 000 » $x =$ 200 000 71
» » = 100 000 » $x =$ 200 000 » $x =$ 1 000 000 72
Unbeschränkt 72

Vorbemerkung.

Über die Veranlassung, die Entstehung, den Zweck und die Genauigkeit dieser Tafeln gibt der Text selbst Auskunft, nämlich S. 7, S. 9 vorletzter Absatz, S. 12 erster Absatz, S. 25, 26.

Öffentlicher Dank gebührt Herrn Offiziant Hesselbarth in München, der bei den Zahlenrechnungen ausgiebig mitgewirkt hat, und Herrn Kapitänleutnant Schade in Gotha, der mich beim Korrekturenlesen wirksam unterstützt hat.

Hinzuzufügen ist noch, daß im Gebiet $x > 10$ bei den Kolumnen $\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_0(x)$ und $\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_1(x)$, welche aus der Reihensummierung hervorgegangen sind, der letzten Dezimale, wenn sie $= 5$ ist, das Zeichen $+$ oder $-$ angehängt wurde, um anzudeuten, daß man bei einer Abkürzung auf 5 Dezimalen nach oben oder nach unten abzurunden hätte. Ist das Zeichen 0 angehängt, so ist die Abrundung gleichgültig.

Gotha, Mai 1911.

Der Verfasser.

I. Allgemeines.

1.

Denkt man sich die Verteilungsfunktion (der Beobachtungsfehler, der Geschwindigkeiten, oder irgend welcher Größen)

$$e^{-\frac{\Delta^2}{\varepsilon^2}} \qquad 1)$$

durch Rotation um die Ordinatenachse über eine Ebene hin ausgebreitet, so daß Δ den Radiusvektor vom Mittelpunkt der Funktion nach einem beliebigen Punkt der Ebene bezeichnet, so kann die Aufgabe entstehen, diese Funktion längs irgend einer Kreisperipherie zu integrieren, welche gegen die Funktion exzentrisch gelegen ist.

Vom Zentrum dieser Kreisperipherie habe der Mittelpunkt der Funktion die Entfernung ϱ_0, während einem beliebigen Punkt der Ebene gegen dasselbe Zentrum die Entfernung ϱ' zukommen möge. Nennt man noch ϑ den Winkel zwischen ϱ_0 und ϱ', so schreibt sich die Verteilungsfunktion 1) in bezug auf das Zentrum der Kreisperipherie als Anfangspunkt der Koordinaten folgendermaßen:

$$\frac{1}{\varepsilon^2 \pi} e^{-\frac{1}{\varepsilon^2}(\varrho_0^2 + \varrho'^2 - 2\varrho_0\varrho' \cos\vartheta)} \varrho' \, d\varrho' \, d\vartheta, \qquad 2)$$

wo der konstante Faktor so gewählt ist, daß das Integral, wenn es auf die ganze Ebene ausgedehnt wird, den Wert 1 erhält.

Die Aufgabe kommt dann, unter der Bezeichnung

$$x = \frac{2\varrho_0\varrho'}{\varepsilon^2},$$

darauf hinaus, das Integral zu berechnen:

$$L_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta} d\vartheta. \qquad 3)$$

Sucht man überdies den Schwerpunkt von allen Häufigkeitswerten 2), so hat man unter dem Integralzeichen mit $\varrho' \cos\vartheta$ zu multiplizieren, und man kommt auf das Integral

$$L_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta} \cos\vartheta \, d\vartheta. \qquad 4)$$

Multipliziert man endlich unter dem Integralzeichen mit einer endlichen Potenz der Koordinaten, so kommt man auf

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\cos^n\vartheta\, d\vartheta$$

oder, was wir vorziehen, auf

$$L_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\cos n\vartheta\, d\vartheta\,. \qquad 5)$$

2.

Diese Funktionen $L_n(x)$ sind bis auf einen konstanten Faktor identisch mit den Bessel'schen Funktionen rein imaginären Argumentes.

Dies zu beweisen, setze man in der Definitionsgleichung der Bessel'schen Funktionen, welche 5) entspricht, nämlich

$$J_n(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(y\sin\omega - n\omega)\,d\omega,$$

$y = \sqrt{-1}\,x$, und sondere den reellen vom imaginären Bestandteil:

$$J_n(\sqrt{-1}\,x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(e^{x\sin\omega}+e^{-x\sin\omega})\cos n\omega\, d\omega + \sqrt{-1}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(e^{x\sin\omega}-e^{-x\sin\omega})\sin n\omega\, d\omega. \quad a)$$

Ist dann n eine gerade Zahl, so heben sich im zweiten Integral die Elemente für ω und $\pi - \omega$ gegenseitig auf, und die beiden Glieder des ersten Integrales

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{x\sin\omega}\cos n\omega\, d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-x\sin\omega}\cos n\omega\, d\omega$$

ziehen sich durch die Substitutionen

$$\omega = \frac{\pi}{2} - \vartheta, \quad \text{bzw.} \quad \omega = \vartheta - \frac{\pi}{2}$$

zusammen in

$$J_n(\sqrt{-1}\,x) = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{x\cos\vartheta}\cos n\vartheta\, d\vartheta = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\cos n\vartheta\, d\vartheta. \qquad b)$$

Ist aber n eine ungerade Zahl, so verschwindet in a) das erste Integral, und die beiden Teile des zweiten Integrales

$$\sqrt{-1}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{x\sin\omega}\sin n\omega\, d\omega - \sqrt{-1}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-x\sin\omega}\sin n\omega\, d\omega$$

geben durch dieselben zwei Substitutionen

$$J_n(-1x) = (-1)^n \frac{2}{x}\int_0^{\frac{n\pi}{2}} e^{x\cos\vartheta}\cos n\vartheta\, d\vartheta = (-1)^n \frac{2}{x}\int_{\frac{n\pi}{2}}^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\cos n\vartheta\, d\vartheta. \quad c)$$

Beide Formeln, b) und c), vereinigen sich aber in

$$J_n(-1x) = (-1)^n \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\cos n\vartheta\, d\vartheta$$

oder

$$L_n(x) = \frac{1}{(-1)^n}\cdot J_n(-1x), \qquad 6)$$

womit die Behauptung bewiesen, und der konstante Faktor gefunden ist.

3.

Wegen dieses Zusammenhanges mit den Bessel'schen Funktionen müssen sich alle $L_n(x)$ auf die zwei ersten, nämlich auf $L_0(x)$ und $L_1(x)$ reduzieren lassen.

In der Tat, integriert man 5) partiell:

$$L_n(x) = \frac{x}{n\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\sin\vartheta\sin n\vartheta\, d\vartheta,$$

so entsteht die Rekursionsformel:

$$nL_n(x) = \frac{x}{2}(L_{n-1}(x) - L_{n-1}(x)). \qquad 7)$$

Man wird sie — wie bei den J reellen Argumentes — so anwenden, daß man

$$p_\nu = \frac{L_\nu}{L_{\nu-1}}$$

setzt und dann mittels

$$p_\nu = \frac{1}{\frac{2\nu}{x} + p_{\nu+1}} \qquad 8)$$

die p mit dem niederen Index aus denen mit dem höheren Index berechnet. Dann ist

$$L_n(x) = L_0(x)\cdot p_1 p_2 p_3 \cdots p_n. \qquad 9)$$

Um nun mit p_n zu beginnen, wird man ebenfalls mit einem höheren $p_{n+\nu}$ anfangen und ebenso rechnen müssen:

$$p_{n+\nu} = \frac{1}{\frac{2n+\nu}{x} + p_{n+\nu+1}} \cdots p_n = \frac{1}{\frac{2n}{x} + p_{n+1}}.$$

Es handelt sich mithin noch um den Ausgangswert $p_{n+\nu+1}$.

4.

Ist x eine kleine Zahl, etwa 1, 2, 3, so wird

$$a = \frac{2(n+\nu)}{x}$$

hinreichend groß sein, um $p_{n+\nu+1} = 0$ als Näherungswert verwenden zu können. Denn ein Fehler in $p_{n+\nu+1}$ — hier zunächst der ganze Betrag — geht erst mit dem Faktor

$$\left(\frac{1}{a}\right)^2$$

in den Wert von $p_{n+\nu}$ ein, usw. Hiernach kann man im gegebenen Fall leicht bemessen, mit welchem ν anzufangen ist, wenn p_n und mithin auch alle $p_{n-1}, \ldots$ eine vorgeschriebene Genauigkeit erreichen sollen.

Ist x größer, etwa 10, so müßte man ν beträchtlich höher wählen. Diese Mehrarbeit abzukürzen, setzt man aber nicht mehr $p_{n+\nu+1} = 0$, sondern man zieht Nutzen davon, daß

$$a = \frac{2(n+\nu)}{x}, \quad \frac{2(n+\nu+1)}{x}, \quad \ldots$$

nicht stark voneinander verschieden sein werden. Aus

$$p_{n+\nu+1} = \frac{1}{\frac{2(n+\nu+1)}{x} + \frac{1}{\frac{2(n+\nu+1)}{x} + \frac{1}{\frac{2(n+\nu+1)}{x} + \cdots}}}$$

folgt aber

$$p_{n+\nu+1} = \sqrt{\left(\frac{n+\nu+1}{x}\right)^2 + 1} - \frac{n+\nu+1}{x}, \qquad 10$$

so daß sich der Ausgangswert ergibt aus

$\frac{2(n+\nu+1)}{x}$	$p_{n+\nu+1}$	$\frac{2(n+\nu+1)}{x}$	$p_{n+\nu+1}$
0.5	0.7808	5.0	0.1926
1.0	0.6180	6.0	0.1623
1.5	0.5000	7.0	0.1401
2.0	0.4142	8.0	0.1231
3.0	0.3028	9.0	0.1098
4.0	0.2361	10.0	0.0990

Ist x noch größer, etwa 100, so wird man ebenso verfahren können; aber wenn dann

$$\frac{2(n+\nu+1)}{x}$$

erheblich kleiner als 1 ist, so leitet man den Ausgangswert besser auf dem umgekehrten Wege ab. Setzt man nämlich

$$p_1 = 1 - \varepsilon ,$$

so ist, wie wir sehen werden, nahezu

$$\varepsilon = \frac{1}{2x} .$$

Wenn man nun das Quadrat dieser Größe vernachlässigt, sonst aber erst

$$\left(\frac{2}{x}\right)^2, \quad \left(\frac{4}{x}\right)^3, \quad \left(\frac{6}{x}\right)^3, \quad \cdots$$

wegläßt, so erhält man durch fortgesetzte Anwendung der Formel

$$p_{\varkappa+1} = \frac{1}{p_\varkappa} - \frac{2\varkappa}{x} . \tag{11}$$

welche durch Umkehrung von 8) entsteht, der Reihe nach:

$$\begin{aligned} p_2 &= 1 + \varepsilon - \frac{2}{x} \\ p_3 &= 1 - \varepsilon - \frac{2}{x} + \left(\frac{2}{x}\right)^2 \\ p_4 &= 1 + \varepsilon - \frac{4}{x} \\ p_5 &= 1 - \varepsilon - \frac{4}{x} + \left(\frac{4}{x}\right)^2 \end{aligned}$$

und allgemein:

$$\left.\begin{aligned} p_{2\varkappa} &= 1 + \frac{1}{2x} - \frac{2\varkappa}{x} \\ p_{2\varkappa+1} &= 1 - \frac{1}{2x} - \frac{2\varkappa}{x} + \left(\frac{2\varkappa}{x}\right)^2 \end{aligned}\right| . \tag{12}$$

Einen dieser zwei Werte also faßt man auf als das $p_{\varkappa+1}$ und rechnet dann wie früher nach 8) vom höheren zum niederen Index.

Ist aber speziell bei solchen großen x der Wert

$$\frac{2n}{x}$$

nicht weit von 0 entfernt, so wird man den soeben zur Aufsuchung des Näherungswertes benutzten Weg jetzt zur Rechnung selbst verwenden, indem man nach der Formel 11) streng vom niederen zum höheren Index fortschreitet, nachdem man von einem p_1 ausgegangen ist, das man aus den Tafeln durch Division von L_1 durch L_0 gebildet hat. — Weit darf man auf diesem Wege nicht fortschreiten, weil die p sukzessiv ungenauer werden. Braucht man aber L_n nur auf vier Dezimalen, so kommt es dem Verfahren zustatten, daß p_1 sechsstellig aus den nachfolgenden Tafeln entnommen werden kann.

5.

Als Beispiel sei zu berechnen $L_5(10)$. Um die Abweichungen schärfer hervortreten zu lassen, soll sechsstellig gerechnet werden.

Jenachdem man von p_{11} oder von p_{10} ausgeht, gibt das Täfelchen S. 4:

$\frac{2 \cdot 11}{10}$	p_{11}	$\frac{2 \cdot 10}{10}$	p_{10}
$= 2.2$	etwa $= 0.39$	$= 2.0$	etwa $= 0.41$.

Dann folgt nach 8):

$p_{10} = 0.418\,410$	
$p_9 = 0.450\,773$	$p_9 = 0.452\,489$
$p_8 = 0.487\,621$	$p_8 = 0.487\,213$
$p_7 = 0.529\,768$	$p_7 = 0.529\,881$
$p_6 = 0.578\,112$	$p_6 = 0.578\,075$
$p_5 = 0.633\,669$	$p_5 = 0.633\,683$.

Hier steht man an der Stelle, von welcher die Zahlen wirklich gebraucht werden. Schreibt man die Logarithmen hin und fügt der Vergleichung halber nun auch eine dritte Kolumne hinzu, welche auf dem umgekehrten Wege mit der Formel 11) berechnet ist, nachdem man mittels der Tafelwerte

$$\log L_0(10) = 3.449\,589$$
$$\log L_1(10) = 3.426\,672$$

einen Ausgangswert gebildet hat, nämlich

$$\log p_1 = 9.977\,083\,,$$

so folgt:

$\log p_5$	$= 9.801\,862$	$9.801\,872$	$9.801\,856$
$\log p_4$	$= 9.843\,551$	$9.843\,547$	$9.843\,554$
$\log p_3$	$= 9.886\,889$	$9.886\,891$	$9.886\,888$
$\log p_2$	$= 9.931\,551$	$9.931\,550$	$9.931\,552$
$\log p_1$	$= 9.977\,084$	$9.977\,084$	$9.977\,083$
$\log L_0$	$= 3.449\,589$	$3.449\,589$	$3.449\,589$
$\log L_5$	$= 2.890\,526$	$2.890\,533$	$2.890\,522$
$L_5(10)$	777.188	777.200	777.180 .

Die erste Rechnung ist als streng zu betrachten; die zweite zeigt die Wirkung einer unzureichenden Ausgangsnäherung; das dritte, umgekehrte Verfahren aber würde man bei $x = 10$ noch nicht anwenden.

6.

Von jetzt ab handelt es sich um die Berechnung von L_0 und L_1.

Diese Zahlen wurden bei einer stellarastronomischen Untersuchung des Verfassers[1]) auf vier Dezimalen gebraucht. Damit aber die Tafeln möglichst nahe in dem Sinne exakt wären, wie man es bei einer Logarithmentafel annimmt, wurde die Rechnung sechsstellig geführt. Doch zeigte sich, daß es dann nicht ökonomisch gewesen wäre, diese Mehrarbeit, nachdem sie einmal vorlag, verloren gehen zu lassen: denn durch geeignete Korrektionen ließ sich erreichen, daß die Tafeln in der sechsten Stelle auf vielleicht eine Einheit als richtig zu betrachten waren. Im späteren Teil $e > 10$ ist die Genauigkeit eine größere.

Die Tafeln sollen daher gewissermaßen einen Thesaurus bilden, welcher sich möglichst nahe an die Rechnungsresultate selbst anschließt, und welcher das Material darlegen soll, aus dem man durch Umformung der Resultate oder durch Abkürzung der Dezimalenzahl oder durch andere Abstufung der Intervalle oder sonstwie diejenigen Tafeln herstellen kann, welche den Ursprung der Zahlen außer acht lassen dürfen, dafür aber bestimmten praktischen Zwecken angepaßt sind.

1 Kritische Untersuchungen über die Bewegung der Sonne durch den Weltraum. Zweiter Abschnitt. Leipzig 1910. Kapitel VII.

II. L_0 und L_1 für x kleiner als 10.

1.

Solange x klein ist, wird man L_0 und L_1 kaum einfacher berechnen können, als durch die Reihen, die man aus

$$L_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\,d\vartheta \qquad L_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\cos\vartheta\,d\vartheta$$

durch Entwickeln der Exponentialgröße erhält:

$$L_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots \qquad 1)$$

$$L_1(x) = \frac{x}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{x^2}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{x^4}{2^2 4^2} + \frac{1}{4}\frac{x^6}{2^2 4^2 6^2} + \cdots\right). \qquad 2)$$

Die Koeffizienten waren für 1) wie für 2) mit der sechsstelligen Tafel sorgfältig berechnet worden. Die Summe der Numeri der Glieder erschien dann in mindestens 7 Dezimalen. Hiervon wurde, wieder mit der sechsstelligen Tafel, der Logarithmus aufgeschlagen und dabei die Abrundung so gewählt, wie es der Verlauf der Differenzen der Numeri forderte.

In L_1 wurde der Faktor x, oder vielmehr ein Glied $\log x$, nicht aufgenommen, weil sonst die Differenzen unbequem groß geworden wären. Dagegen ist der Nenner 2 berücksichtigt worden, zumal da wegen der Nullen in der siebenten und achten Dezimale von $\log 2$ die Abrundung nicht alteriert wird.

2.

Auch die $\log x$ waren sechsstellig hingeschrieben. Nachdem dann aber beschlossen war, die Tafel selbst sechsstellig zu geben, mußte die siebente Dezimale von $\log x$ durch das Potenzieren zur Wirkung gelangen.

Aus

$$L_0 = 1 + [9.3979]\cdot x^2 + [8.1938]\cdot x^4 + [6.6375]\cdot x^6 + \cdots$$

oder

$$\Delta L_0 = [2\cdot 9.3979]\cdot x + [4\cdot 8.1938]\cdot x^3 + [6\cdot 6.6375]\cdot x^5 + \cdots)\,\Delta x$$

folgt aber wegen

$$\Delta x = \frac{1}{\log e}\,x\,\Delta \log \text{brigg}\, x$$

die Verbesserung

$$\Delta L_0 = (0.0611 \cdot x^2 + 9.1581 \cdot x^4 + (7.7779 \cdot x^6 + \cdots) \Delta \log \text{brigg}\, x \quad 3$$

und ebenso

$$\Delta\left(\frac{2}{x} L_1\right) = (9.7601 \cdot x^2 + 8.6810 \cdot x^4 + 7.1758 \cdot x^6 + \cdots) \Delta \log \text{brigg}\, x. \quad 4$$

Für jedes einzelne Glied von 3 und 4 wurde ein Täfelchen hergestellt, ferner aus einer Vergleichung der sechsstelligen mit der siebenstelligen Tafel die Ziffer $\Delta \log \text{brigg}\, x$ entnommen und dann die Verbesserung jedem berechneten Einzelgliede von 1) und 2) hinzugefügt.

Man hätte zwar 3 und 4 auch generell berechnen können; so aber wurde die Differenzenkontrolle der Einzelglieder von 1) und 2) gesichert.

3.

Die Rechnung nach 1) und 2) wird um so beschwerlicher, je größer x wird.

Dieses Verhalten besteht auch bei den reellen Bessel'schen Funktionen. Daher hat Poisson[1] für $J_0(x)$ eine halbkonvergente Reihe, die nach fallenden Potenzen von x fortschreitet, abgeleitet, ohne jedoch ihren Rest zu bestimmen; dieselbe Entwicklung hat für J_0 und J_1 unabhängig davon auch Hansen[2] gegeben. Lipschitz[3] endlich hat gezeigt, daß der Fehler stets kleiner ist als das letzte mitgenommene Glied.

Die fallenden Reihen für L_0 und L_1 hat der Verfasser an anderer Stelle[4]) schon angegeben. Da die Vorzeichen nicht abwechseln, wie bei den reellen J, so kann man sie nicht als eigentlich halbkonvergent bezeichnen, obzwar die Glieder ebenfalls bis zu einer gewissen Stelle abnehmen. Das Restglied von Lipschitz aber läßt sich nicht auf unseren Fall brauchbar übertragen.

Hierdurch sind die nachstehenden Untersuchungen veranlaßt, durch welche der Fehler auf einen Spielraum eingegrenzt wird, der praktisch verschwindend klein ist.

Da diese Reihen, im Gegensatz zu 1) und 2), mit wachsendem x immer bequemer werden, so wäre der rechnerische Arbeitsaufwand am kleinsten gewesen, wenn die Trennungsstelle der beiden Methoden so gelegt worden wäre, daß man dort nach steigenden und hier nach fallenden Potenzen die gleiche Gliederzahl nötig gehabt hätte. Da jedoch während des ersten Teiles der Rechnung die Restbetrachtung in ihrer jetzigen Einfachheit noch nicht vorlag, so wurde die Rechnung nach dem ersten Verfahren bis zu $x = 10$ geführt; und diese Grenze wurde, der runden Zahl zuliebe, auch in der Anordnung der Resultate nachstehend festgehalten.

1) Journal de l'école polytechnique, Cahier 19.
2) Ermittlung der absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Exzentrizität und Neigung.
3) Crelles Journal, Bd. 56.
4) Kritische Untersuchungen . . ., zweiter Abschnitt, Kapitel VI.

III. I_0 oberhalb $x = 10$.

1.

Um $I_0(x)$ in eine Reihe zu verwandeln, die bei großen x zur numerischen Rechnung besonders geeignet sein soll, gehen wir wieder von der Integralform aus

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\, d\vartheta. \qquad 1$$

Substituiert man

$$\cos\vartheta = 1 - 2z^2,$$

so wird

$$I_0(x) = \frac{2e^x}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-2xz^2}}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz. \qquad 2$$

Da der Nenner für $z = 1$ den Wert 0 annimmt, so zerlegen wir das Integral in zwei Teile:

$$I_0(x) = \frac{2e^x}{\pi}\int_0^{z_1} \frac{e^{-2xz^2}}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz + \frac{2e^x}{\pi}\int_{z_1}^1 \frac{e^{-2xz^2}}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz,$$

indem wir uns die genauere Wahl der Zwischengrenze z_1 noch vorbehalten, und führen im zweiten Integral durch

$$u^2 = 1 - z^2$$

eine neue Variable ein. Setzt man auch

$$u_1^2 = 1 - z_1^2, \qquad 3$$

so kann man schreiben:

$$I_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sqrt{2\pi}\int_0^{z_1} \frac{e^{-2xz^2}}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz - \frac{2}{\pi x}\, e^{-2x}\sqrt{2\pi}\int_0^{u_1} \frac{e^{-2xu^2}}{\sqrt{1 - u^2}}\, du\right). \qquad 4$$

Was zunächst die Größenordnung des ersten Klammergliedes betrifft, so nimmt der Nenner nicht mehr den Wert 0 an; vielmehr werden diejenigen Integrationselemente, in denen der Nenner stärker von der Einheit abweicht, wegen des großen x durch den Zähler sehr stark niedergedrückt. Darf man aber zur Feststellung der Größenordnung den Nenner durch die Einheit ersetzen, so darf man statt z_1 auch ∞ schreiben; dann aber bleibt:

$$\sqrt{2x}\int_0^\infty e^{-2x z^2} dz = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

Mithin ist das erste Glied der Klammer von der Ordnung der Einheit.

Wenn wir daher bei der genaueren Berechnung der Klammer 4) kleine Größen additiv abtrennen werden, so wird der numerische Wert einer solchen Korrektion zugleich ihren verhältnismäßigen Wert angeben.

2.

Als eine solche Ergänzung ist in der Klammer 4 zunächst das zweite Glied selbst zu betrachten:

$$S_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2x}\cdot\sqrt{2v}\int_0^{u_1} \frac{e^{2xu^2}}{1-u^2}\,du. \qquad 5$$

Entwickelt man den Nenner und in jedem Glied wieder den Zähler, und integriert man, indem man setzt:

$$v_1^2 = 2xu_1^2, \qquad 6)$$

so wird

$$S_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2x}\cdot v_1\left(E_0 + E_0'\cdot u_1^2 + E_0''\cdot u_1^4 + \cdots\right). \qquad 7)$$

wobei

$$E_0 = 1 + \frac{1}{3}\frac{v_1^2}{1} + \frac{1}{5}\frac{v_1^4}{1\cdot 2} + \cdots$$

$$E_0' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{v_1^2}{1} + \frac{1}{7}\frac{v_1^4}{1\cdot 2} + \cdots\right) < E_0$$

$$E_0'' = \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\frac{v_1^2}{2} + \frac{1}{9}\frac{v_1^4}{1\cdot 2} + \cdots\right) < E_0.$$

Auf alle Fälle soll nun x mindestens $= 10$ sein. Hat man dann — vgl. Art. 1 — die Zwischengrenze z_1 so gewählt, daß nach 3) und 6) v_1 von der Größenordnung wie die Einheit wird, so sind in 7) die nachfolgenden Glieder von höherer Ordnung als das erste, wenn man 1 : 20 als eine Größe erster Ordnung auffaßt. Mithin ist

$$S_0 \text{ von der Ordnung wie } \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot v_1 E_0(v_1)\cdot e^{-2x}. \qquad 8)'$$

Hiervon unterscheiden wir zunächst noch den speziellen Fall, daß v_1 direkt $= 1$ gewählt war. Dann ist

$$E_0(1) = 1.4627$$

und mithin

$$S_0 \text{ von der Ordnung wie } 1.6504\cdot e^{-2x}. \qquad 8)$$

Nun sind die nachfolgenden Tafeln, welche den Wert der Klammer von 4 auf sechs Dezimalen hinter dem Komma angeben, so berechnet worden, daß eine Einheit der siebenten Dezimale oder wegen der Abrundung eine halbe Einheit mitgenommen wurde. Für $x > 10$ wird aber nach 8

$$S_0 < 0{,}000\,000\,003\,402 \qquad 8_a$$

und mithin darf das zweite Glied von 4) aus unserer Betrachtung ausscheiden.

3.

Im ersten Glied der Klammer von 4) entwickeln wir den Nenner bis zur Potenz $2n$, deren spezielle Wahl wir uns noch vorbehalten:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{2x} \int_0^{z_1} e^{-2xz^2} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} =$$
$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{2x} \int_0^{z_1} e^{-2xz^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} z^4 + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} z^{2n}\right) dz + R_0(n+1) \qquad 9$$

und suchen für den Rest

$$R_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{2x} \text{ mal}$$
$$\int_0^{z_1} e^{-2xz^2} z^{2n+2} \left(1 + \frac{2n+3}{2n+4} z^2 + \frac{(2n+3)(2n+5)}{(2n+4)(2n+6)} z^4 + \cdots\right) dz$$

eine obere Grenze.

Indem man jeden Koeffizienten der Klammer durch die Einheit ersetzt, wird

$$R_0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{2x} \int_0^{z_1} e^{-2xz^2} \frac{z^{2n+2}}{1-z^2} dz .$$

Dieser Wert wird zwar zu stark vergrößert, aber man macht sich frei von Unterscheidungen in bezug auf n und x, wenn man dem Nenner unter dem Integralzeichen konstant den kleinsten Wert erteilt, den er überhaupt annehmen kann. Dann wird nach 3) und 6)

$$R_0 < \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{z_1^2} \cdot \sqrt{2x^3} \int_0^{z_1} e^{-2xz^2} z^{2n+2} dz$$

und, indem man die obere Grenze z_1 ins Unendliche wachsen läßt:

$$R_0(n+1) < \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n+1)^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{z_1^2} \cdot \frac{1}{x^n} \qquad 10'$$

oder, wenn man lieber will, für $z_1 = 1$:

$$R_0(n+1) < \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n+1)^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \cdot \frac{1}{2^{2n+1}} \cdot \frac{1}{x^n} . \qquad 10$$

In der halbkonvergenten Reihe, die nach all diesen Ausscheidungen schließlich übrig bleibt, und welche der Rechnung zugrunde gelegt ist, nehmen nun, indem sie nur für $x > 10$ zur Anwendung kommt, die Glieder so rasch ab, daß man im ungünstigsten Fall in der Nähe von $x = 10$ bis zu $n = 7$ zu gehen braucht, wenn die Teilresultate unter

$$0.000\,000\,1$$

wegbleiben dürfen. Setzt man aber in 10)′ $n = 7$, so wird

$$R_0\,8 < 12.15 \frac{1}{v_1^2} \frac{1}{x^7},$$

mithin wird dieser Wert für $v_1 = 1$, $x = 10$, nämlich

$$R_0 < 0.000\,001\,2,$$

die Genauigkeitsgrenze übersteigen.

Diesem Übelstand abzuhelfen, kann man über die bisher noch frei gehaltenen Größen verfügen.

1. Über n. Hier sei nur bemerkt, daß der Ausdruck 10) für R_0 weiterhin rasch abnimmt, wenn n über 7 hinausgeht sein Minimum erreicht er bei $n = 19$). So wird z. B. für $n = 10$:

$$R_0(11) < 1103 \frac{1}{v_1^2} \frac{1}{x^{10}} \qquad 11)'$$

und speziell für $v_1 = 1$, $x = 10$:

$$R_0 < 0.000\,000\,110\,3. \qquad 11)_a$$

Andererseits bleiben diejenigen Glieder, welche in der Reihe 9) bei dieser Vergrößerung von n hinzukommen, wie schon erwähnt wurde, unmerklich. Dieses Verhalten enthält keinen Widerspruch: R_0 ist eben nicht der Rest der Reihe, sondern, der Ableitung entsprechend, ein Ausdruck, der größer ist als der Rest, und der eben dem unbekannten Rest bei $n = 10$ näher kommt als bei $n = 7$.

Mit $11)_a$ ist man an die Genauigkeitsgrenze herangerückt. Doch werden wir Art. 7) sehen, wie man die Genauigkeit weiter erhöhen könnte, wenn das Bedürfnis vorläge.

2. Man könnte, um R_0 zu verkleinern, auch $v_1 > 1$ wählen. Doch ist diese Willkür nicht unbeschränkt. Zunächst deshalb nicht, weil nach 6) für $v_1 = \sqrt{2x}$ die Reihe 7) zu konvergieren aufhört. Außerdem ist E_0 stark von v_1 abhängig. Für diesen Wert, nämlich

$$E_0 = \frac{1}{v_1} \sqrt{2x} \int_0^{v_1} e^{2xu^2} du = \frac{1}{v_1} \int_0^{v_1} e^{v^2} dv$$

ist die Größenordnung gegeben durch den Ausdruck:

$$\frac{e^{v_1^2}}{2v_1^2},$$

etwa in dem Sinne, wie die Größenordnung des ersten Klammergliedes von 4) durch die Einheit ausgedrückt war (vgl. Art. 1). Dieser Ausdruck aber gibt

	für	$e_1 = 2$	3	4,
eine Näherung für		$E_0 = 7$	450	277 691.

Demnach dürfte man nicht $e_1 = 3$ setzen, wenn nicht S_0 nach 8′ über unsere Genauigkeitsgrenze hinauswachsen soll. Für $e_1 = 2$ aber wird $11)_a$ auf seinen vierten Teil reduziert, während gleichzeitig das nach 8′ mit $2E_0(2) : E_0(1) = 9.6$ multiplizierte S_0 von $8')_a$ genau genug bleibt.

Da der Vorteil nicht erheblich ist, so soll fortan $e_1 = 1$ gesetzt werden.

4.

Die Klammergröße von 4) reduziert sich nunmehr auf die endliche Reihe 9), oder, wenn man $y^2 = 2xz^2$ und

$$y_1 = \sqrt{2x}z_1 \qquad 12)$$

setzt, auf den Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{y_1} e^{-y^2}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{1}{2x}y^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{(2x)^2}y^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{1}{(2x)^n}y^{2n}\right)dy. \qquad 13$$

Für ein beliebiges Glied gilt aber:

$$\int_{y_1}^{\infty} e^{-y^2}y^{2i}dy = \frac{e^{-y_1^2}}{2}\left(y_1^{2i-1} + \frac{2i-1}{2}y_1^{2i-3} + \frac{2i-1}{2}\frac{2i-3}{2}y_1^{2i-5} + \cdots + \frac{2i-1}{2}\frac{2i-3}{2}\cdots\frac{3}{2}y_1\right)$$
$$+ \frac{2i-1}{2}\frac{2i-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\int_{y_1}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

und speziell für $y_1 = 0$

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}y^{2i}dy = \frac{2i-1}{2}\frac{2i-3}{2}\cdots\frac{3}{2}\frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy,$$

mithin durch Subtraktion

$$\int_0^{y_1} e^{-y^2}y^{2i}dy = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i-1)}{2^i}\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2i-1)}{2^i}\int_{y_1}^{\infty} e^{-y^2}dy$$
$$- \frac{e^{-y_1^2}}{2}\left(y_1^{2i-1} + \frac{2i-1}{2}y_1^{2i-3} + \frac{2i-1}{2}\frac{2i-3}{2}y_1^{2i-5} + \cdots + \frac{2i-1}{2}\frac{2i-3}{2}\cdots\frac{3}{2}y_1\right).$$

Substituiert man für alle ganzzahligen i bis $i = n$ das erste dieser drei Glieder in die Formel 13), nachdem man eingeführt hat:

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2}dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

so entsteht der Hauptbestandteil:

$$O_0 = 1 + \frac{1^2}{2}\,\frac{1}{2^2}\,\frac{1}{x} + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 4}\,\frac{1}{2^4}\,\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdots (2n-1)^2}{2 \cdot 4 \cdots 2n}\,\frac{1}{2^{2n}}\,\frac{1}{x^n}. \qquad 14)$$

Substituiert man ebenso das zweite Glied und führt ein

$$\int_{y_1}^{\infty} e^{-y^2} = \frac{e^{-y_1^2}}{2y_1}\left(1 - \frac{1}{2y_1^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 y_1^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 y_1^6} + \cdots\right),$$

so folgt der ergänzende Teil

$$P_0 = \frac{e^{-y_1^2}}{\sqrt{\pi}\, y_1}\left(1 - \frac{1}{2y_1^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 y_1^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 y_1^6} + \cdots\right) O_0 \qquad 15)$$

und das dritte Glied schließlich liefert eine weitere Ergänzung:

$$Q_0 = \frac{e^{-y_1^2}}{\sqrt{\pi}} \text{ mal} \qquad 16)$$

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}\frac{y_1}{2x} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{y_1^3}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{y_1^5}{2x^3} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\frac{y_1^{2n-1}}{(2x)^n}\right) \right.$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{3y_1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{5y_1^3}{2x^3} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\frac{(2n-1)\, y_1^{2n-3}}{(2x)^n}\right)$$

$$+ \frac{1}{2^2}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{3 \cdot 5 y_1}{2x^3} + \cdots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\frac{(2n-3)(2n-1)\, y_1^{2n-5}}{(2x)^n}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left. + \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\frac{3 \cdot 5 \cdots (2n-3)(2n-1)\, y_1}{(2x)^n}\right)\right\}.$$

Demnach ergibt sich:

$$\text{Endliche Reihe in } 4 = \text{Ausdruck } 13 = O_0 - P_0 - Q_0. \qquad 17$$

wo noch die zwei Nebenbestandteile P_0 und Q_0 abzuschätzen sind.

5.

Die Reihe in 15 hat bekanntlich die Eigenschaft, daß der Wert, den sie repräsentiert, zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern liegt; er ist mithin kleiner als 1. Da ferner der Faktor O_0 nur wenig größer als 1 ist, so ist

$$P_0 \text{ von der Ordnung wie } \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-y_1^2}}{y_1}$$

oder, wenn man y_1 durch 12), dann z_1 durch 3) und u_1 durch 6) ersetzt und $v_1 = 1$ nimmt:

$$P_0 \text{ von der Ordnung wie } \frac{e}{\sqrt{\pi}}\,\frac{e^{-2x}}{\sqrt{2x-1}}; \qquad 18)$$

für $x > 10$ folgt hieraus

$$P_0 < 0.000\,000\,000\,725. \qquad 18\text{ a}$$

6.

Endlich in der ersten Klammer von 16) sind nach 12), 3), 6) alle zweiten Faktoren von der gleichen Ordnung; denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{y_1}{2x} &= \frac{\sqrt{2x-1}}{2x} \\ \frac{y_1^3}{(2x)^2} &= \frac{\sqrt{2x-1}}{2x}\left(1-\frac{1}{2x}\right) \\ \frac{y_1^5}{(2x)^3} &= \frac{\sqrt{2x-1}}{2x}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^2 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Mithin ist die erste Klammer von der Ordnung wie

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{2x} N_0,$$

wobei

$$N_0 = \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}, \qquad 19)$$

also z. B.:

$n =$	7	10	14	15	16	20	
$N_0 =$	2.1421	2.7001	3.3339	3.4784	3.6183	4.1402.	$19)_a$

In der zweiten Klammer aber sind die entsprechenden Glieder mit

$$3 \qquad 5 \qquad 7 \qquad \cdots \qquad 2n-1$$

multipliziert und durchweg mit

$$y_1^2 = 2x - 1$$

dividiert.

Solange mithin $n < x$, hat die zweite Klammer einen kleineren Wert als die erste. Da dies auch für die folgenden gilt, so wird im ganzen

$$Q_0 < \frac{e}{\sqrt{\pi}} \cdot N_0 \cdot \frac{\sqrt{2x-1}}{x} e^{-2x}, \qquad 20)$$

woraus für $n = 10$

$$Q_0 < 4.141 \cdot \frac{\sqrt{2x-1}}{x} e^{-2x}$$

und speziell für $x = 10$

$$Q_0 < 0.000\,000\,003\,720. \qquad 20)_a$$

Liegt aber n zwischen x und $2x$, so wird die geschweifte Klammer von 16), wie die letzte Vertikalreihe zeigt,

$$< N_0\left(1 + \frac{1}{2}\frac{2n}{2x} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{2n-1}{2x-1}\right)^2 + \cdots\right)\frac{\sqrt{2x-1}}{2x} = N_0 \frac{4x-2}{4x-2n-1}\frac{\sqrt{2x-1}}{2x}$$

und mithin

$$Q_0 < \frac{e}{\sqrt{x}} N_0 \frac{\sqrt{2x-1}^3}{x(4x-2n-1)} e^{-2x} \qquad 21)$$

was von derselben Ordnung ist wie 20).

7.

Rekapitulieren wir, indem wir auf die Gleichung 4) zurückgehen, so ist

$$L_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} (O_0 - P_0 - Q_0 + R_0 + S_0) . \qquad 22)$$

Hier sind P_0 und S_0 von n unabhängig, nämlich:

P_0 von der Ordnung wie $1.5336 \frac{e^{-2x}}{\sqrt{2x-1}}$ nach 18

S_0 » » » » $1.6504\, e^{-2x}$ » 8

und speziell für $x > 10$:

$$P_0 < 0.000\,000\,000\,725$$
$$S_0 < 0.000\,000\,003\,402 .$$

Q_0 und R_0 aber sind von n abhängig, und zwar wird, wenn bei $x = 10$ n über 10 hinausgeht, Q_0 nach 21) über den Wert 20_a hinausgehen, R_0 aber nach 10) unter den Wert 11_a herabsinken. Die Gleichheit liegt bei $n = 15$, da

	für $n =$	14	15	16
nach 19_a:	$N_0 =$	3.334	3.478	3.618
» 21):	$Q_0 <$	0.000 000 008	0.000 000 010	0.000 000 014
» 10):	$R_0 <$	0.000 000 017	0.000 000 012	0.000 000 010 .

Dies ist mithin die Stelle, wo die größte Genauigkeit erreicht wird, wenn man bei diesen einfachen Betrachtungen stehen bleiben will. Es kommt hinzu, daß Q_0 und R_0 mit entgegengesetztem Zeichen in 22) eingehen. Hierauf wurde in Art. 3 verwiesen.

Bis zu dieser Genauigkeit also würde man gelangen, wenn man in der Endformel

$$L_0(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 + \frac{1^2}{2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{x} + \frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4}\frac{1}{2^4}\frac{1}{x^2} + \cdots + \frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{x^n}\right) \qquad 23)$$

bei $n = 15$ abbräche.

8.

Es sollen für $x = 10$ diejenigen Glieder der Reihe 14) oder 23 angeführt werden, welche zur Beurteilung der Genauigkeit in Frage kommen:

$G(7) =$	0,000 000 172 773
8	60 741
9	24 381
10	11 002
11	5 513
12	3 038
13	1 826
14	1 188
15	833
16	625
17	501
18	426
19	384
20	365
21	365
22	383
23	422
24	485
25	583

Hierbei ist

$$G_0(n) = \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n-1)^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \frac{1}{2^{2n}} \frac{1}{x^n}.$$

Nach 10) aber ist für den auf dieses Glied folgenden Rest

$$R_0(n+1) < \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (2n+1)^2}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n+2)} \frac{1}{2^{2n+1}} \frac{1}{x^{n+1}}.$$

Vergleicht man, so ist

$$R_0(n+1) < (n+1) \cdot G_0(n). \qquad 24)$$

Hieraus sieht man, warum die R_0, wie sie hier ausgedrückt sind, erheblich größer erscheinen, als die G_0, aber doch in der früher betrachteten Partie ebenfalls rasch abnehmen. (Vgl. Art. 3.)

IV. L_1 oberhalb $x = 10$.

1.

Auf die Entwicklung von $L_1(x)$ läßt sich derselbe Gedankengang anwenden. Man geht aus von

$$L_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{x\cos\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta \qquad 1)$$

substituiert

$$\cos\vartheta = 1 - 2z^2,$$

so daß

$$L_1(x) = \frac{2e^x}{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-2xz^2}(1-2z^2)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz, \qquad 2$$

zerlegt das Integral in

$$L_1(x) = \frac{2e^x}{\pi}\int_0^{z_1} \frac{e^{-2xz^2}(1-2z^2)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz + \frac{2e^x}{\pi}\int_{z_1}^1 \frac{e^{-2xz^2}(1-2z^2)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz$$

und setzt im zweiten Integral

$$z^2 = 1 - u^2$$
$$z_1^2 = 1 - u_1^2. \qquad 3)$$

Dann ist

$$L_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{2x}\int_0^{z_1} \frac{e^{-2xz^2}(1-2z^2)}{\sqrt{1-z^2}}\,dz - \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x}\sqrt{2x}\int_0^{u_1} \frac{e^{+2xu^2}(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}}\,du\right). \qquad 4$$

Auch hier ist das erste Klammerglied von der Größenordnung der Einheit.

2.

Das zweite Glied der Klammer, nämlich abgesehen vom Vorzeichen

$$S_1 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}e^{-2x}\sqrt{2x}\int_0^{u_1} \frac{e^{+2xu^2}(1-2u^2)}{\sqrt{1-u^2}}\,du, \qquad 5$$

geht bei derselben Bezeichnung

$$v_1^2 = 2xu_1^2 \qquad 6)$$

über in

$$S_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-2x} \cdot r_1 \; E_1 - E_1' \cdot r_1^2 \; + E_1'' \cdot r_1^4 \quad \cdots . \tag{7}$$

wobei

$$E_1 = 1 + \frac{1}{3}\frac{r_1^2}{1} + \frac{1}{5}\frac{r_1^4}{1\cdot 2} + \cdots$$

$$E_1' = \frac{3}{1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{r_1^2}{1} + \frac{1}{7}\frac{r_1^4}{1\cdot 2} + \cdots\right)$$

$$E_1'' = \frac{5}{3}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\frac{r_1^2}{1} + \frac{1}{9}\frac{r_1^4}{1\cdot 2} + \cdots\right).$$

Ist r_1 von der Ordnung der Einheit, so ist auch hier

$$S_1 \text{ von der Ordnung wie } \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot r_1 E_1(r_1) \cdot e^{-2x}, \tag{8'}$$

mithin wird für $r_1 = 1$, da $E_1 = E_0$:

$$S_1 \text{ von der Ordnung wie } 1.6504 \cdot e^{-2x} \tag{8}$$

und speziell für $x > 10$

$$S_1 < 0.000\,000\,003\,402\,. \tag{8_a}$$

3.

Das erste Glied der Klammer in 4) wird durch Entwickeln:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{2x} \int_0^{r_1} \frac{e^{-2x z^2}(1 - 2z^2)}{\sqrt{1 - z^2}}\, dz =$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{2x} \int_0^{r_1} e^{-2x z^2} \cdot \left(1 - \frac{3}{1}\frac{1}{2} z^2 - \frac{5}{3}\cdot\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} z^4 - \cdots - \frac{2n+1}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} z^{2n}\right) dz \tag{9}$$

$$- R_1(n+1)\,,$$

wobei

$$R_1 = \frac{2n+3}{2n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{2x} \text{ mal}$$

$$\int_0^{r_1} e^{-2x z^2} z^{2n+2}\left(1 + \frac{(2n+1)(2n+5)}{(2n+3)(2n+3)} \cdot \frac{2n+3}{2n+4} z^2 + \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)} \cdot \frac{(2n+3)(2n+5}{(2n+4)(2n+6)} z^4 + \cdots\right) dz,$$

so daß

$$R_1 < \frac{2n+3}{2n+1} R_0, \tag{10}$$

also für $n = 10$

$$R_1(11) < 1208\,\frac{1}{r_1^2}\,\frac{1}{x^{10}} \tag{11'}$$

und für $r_1 = 1$, $x = 10$

$$R_1 < 0.000\,000\,120\,8\,. \tag{11_a}$$

Wegen $E_1 \cdots E_n$ bleiben auch die Bemerkungen am Schluß von Art. 3 des vorigen Kapitels hier in Gültigkeit.

4.

Die erste Klammergröße von 4) reduziert sich nunmehr auf die endliche Reihe 9) oder bei der Bezeichnung

$$y_1 = \sqrt{2x}\, z_1 \tag{12}$$

auf den Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{y_1} e^{-y^2} \left(1 - \frac{3}{1}\frac{1}{2}\frac{1}{2x}y^2 - \frac{5}{3}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{(2x)^2}y^4 - \cdots - \frac{2n+1}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{1}{(2x)^n}y^{2n}\right) dy. \tag{13}$$

Setzt man nach denselben Rechnungen wie früher

$$O_1 = 1 - \frac{3}{1}\frac{1^2}{2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{x} - \frac{5}{3}\frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4}\frac{1}{2^4}\frac{1}{x^2} - \cdots - \frac{2n+1}{2n-1}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{x^n} \tag{14}$$

$$P_1 = \frac{e^{-y_1^2}}{\sqrt{\pi}\, y_1}\left(1 - \frac{1}{2y_1^2} + \frac{1\cdot 3}{2^2 y_1^4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 y_1^6} + \cdots\right) O_1 \tag{15}$$

$$Q_1 = \frac{e^{-y_1^2}}{\sqrt{\pi}} \text{ mal} \tag{16}$$

$$\left\{ \left(\frac{3}{1}\frac{1}{2}\frac{y_1}{2x} + \frac{5}{3}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{y_1^3}{(2x)^2} + \frac{7}{5}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{y_1^5}{(2x)^3} + \cdots + \frac{2n+1}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{y_1^{2n-1}}{(2x)^n}\right) \right.$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{3y_1}{(2x)^2} + \frac{7}{5}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{5y_1^3}{(2x)^3} + \cdots + \frac{2n+1}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{(2n-1)y_1^{2n-3}}{(2x)^n}\right)$$

$$+\frac{1}{2^2}\left(\frac{7}{5}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{3\cdot 5y_1}{(2x)^3} + \cdots + \frac{2n+1}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{(2n-3)(2n-1)y_1^{2n-5}}{(2x)^n}\right)$$

$$\left. +\frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)y_1}{(2x)^n}\right)\right\},$$

so wird

$$\text{Endliche Reihe} = \text{Ausdruck 13)} = O_1 - P_1 + Q_1. \tag{17}$$

5.

Da $O_1 < 1$, so ist nach 15)

$$P_1 < \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-y_1^2}}{y_1},$$

mithin auf dieselbe Weise wie früher für $v_1 = 1$:

$$P_1 < \frac{e}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-2x}}{2x-1} \tag{18}$$

und für $x > 10$

$$P_1 < 0{,}000\,000\,000\,725. \tag{18a}$$

6.

Auf dieselbe Weise wie früher schließt man, daß die erste Klammer von 16) von der Ordnung ist wie

$$\frac{\sqrt{2x-1}}{2x} N_1,$$

wobei

$$N_1 = \frac{3}{1}\frac{1}{2} + \frac{5}{3}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{7}{5}\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + \cdots + \frac{2n+1}{2n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}, \qquad 19)$$

also z. B.:

$n =$	7	10	14	15	16	20	
$N_1 =$	3.7231	4.3477	5.0350	5.1895	5.3384	5.8895 .	$19)_a$

Solange $n < x$, hat jede Klammer einen kleineren Wert als die vorige, und es wird im ganzen:

$$Q_1 < \frac{e}{\sqrt{x}} \cdot N_1 \cdot \frac{\sqrt{2x-1}}{x} e^{-2x}, \qquad 20)$$

woraus für $n = 10$

$$Q_1 < 6.668 \frac{\sqrt{2x-1}}{x} e^{-2x}$$

und speziell für $x = 10$

$$Q_1 < 0.000\,000\,005\,991. \qquad 20)_a$$

Liegt aber n zwischen x und $2x$, so erhält man ähnlich wie früher

$$Q_1 < \frac{e}{\sqrt{x}} \cdot N_1 \cdot \frac{\sqrt{2x-1}^3}{x(4x-2n-1)} e^{-2x}. \qquad 21)$$

7.

Geht man zurück auf die Gleichung 4), so ist im ganzen:

$$L_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}} (O_1 - P_1 + Q_1 - R_1 - S_1). \qquad 22)$$

P_1 und S_1 sind von n unabhängig, nämlich

$$P_1 < 1{,}5336 \frac{e^{-2x}}{\sqrt{2x-1}} \quad \text{nach } 18)$$

$$S_1 < 1{,}6504\, e^{-2x} \quad \text{» } 8)$$

und speziell für $x > 10$

$$P_1 < 0.000\,000\,000\,725$$

$$S_1 < 0{,}000\,000\,003\,402.$$

Q_1 und R_1 aber haben wieder die Eigenschaft, daß mit wachsendem n das eine steigt, und das andere fällt. Die Gleichheit liegt bei $n = 15$, da

für	$n =$	14	15	16
nach 19)$_a$:	$N_1 =$	5.035	5.189	5.338
» 21):	$Q_1 <$	0.000 000 012	0.000 000 015	0.000 000 020
» 10):	$R_1 <$	0.000 000 018	0.000 000 013	0.000 000 011.

Auch hier gehen Q_1 und R_1 mit entgegengesetzten Zeichen in 22) ein. Das wäre also wieder die Genauigkeit, die man erreichen würde, wenn man in der Endformel

$$L_1(x) = \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}\left(1 - \frac{3}{1}\frac{1^2}{2}\frac{1}{2^2}\frac{1}{x} - \frac{5}{3}\frac{1^2\cdot 3^2}{2\cdot 4}\frac{1}{2^4}\frac{1}{x^2} - \cdots \right.$$
$$\left. \cdots - \frac{2n+1}{2n-1}\frac{1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdots(2n-1)^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\frac{1}{2^{2n}}\frac{1}{x^n}\right) \qquad 23)$$

bei $n = 15$ abbräche.

8.

Die Glieder in 14) oder 23), die zur Beurteilung der Genauigkeit in Frage kommen, sind von der Größenordnung wie früher. Auch gilt nach 10) für den Rest:

$$R_1(n+1) < n+1 \cdot G_1(n). \qquad 24)$$

V. Anordnung, Abstufung und Genauigkeit der Tafeln.

1.

Unterhalb $x = 10$ ist tabuliert worden

$$\log L_0(x) \qquad \text{und} \qquad \log L_1(x) - \log x,$$

weil $\log L_1(x)$ selbst zu große Differenzen ergeben hätte.

Oberhalb $x = 10$ ist zunächst die Summe der semikonvergenten Reihe tabuliert, als die direkt erhaltene Zahl. Diese Werte bedeuten mithin

$$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_0(x) \qquad \text{und} \qquad \sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_1(x).$$

Danebenstehend sind zum engeren Anschluß an den ersten Teil die Werte angeführt

$$\log \sqrt{x}\, L_0(x) \qquad \text{und} \qquad \log \sqrt{x}\, L_1(x).$$

Die Differenzen bestehen dann aus einem großen konstanten und einem kleinen veränderlichen Teil.

2.

Auf diese Weise ließ sich unterhalb $x = 10$ das konstante Intervall 0.01 festhalten.

Oberhalb $x = 10$ verlaufen die Argumente bis ins Unendliche. Das Intervall wurde nun so bestimmt, daß in den erwähnten Summen der semikonvergenten Reihen die zweiten Differenzen bei der Interpolation ohne Wirkung bleiben sollten. Das größte Glied dieser Reihen

$$\text{in } L_0\colon \ \frac{1}{8x} \qquad \text{und} \qquad \text{in } L_1\colon \ -\frac{3}{8x}$$

führt unter der Bedingung, daß die maximale Wirkung der zweiten Differenzen, nämlich

$$\frac{\Delta x^2}{32x^3} \qquad \text{und} \qquad \frac{3\,\Delta x^2}{32x^3},$$

kleiner als

$$0{,}0000005$$

bleiben soll, auf die Intervallgebiete:

$\Delta x =$	0.1	1	10	100	1000	10000	
in L_0 zwischen	8.55	39.69	184.2	855.0	3969	18420	85499
» L_1 »	12.33	57.24	265.7	1233.1	5724	26566	123311

Doch wurden sie gemeinsam folgendermaßen gewählt:

10	50	200	1000	5000	20000	200000.

3.

Solche Erwägungen waren auch mitwirkend bei der Entscheidung, ob unterhalb $x = 10$ die Numeri oder die Logarithmen tabuliert werden sollten. Keines von beiden erfüllt die Bedingung im ganzen Gebiete, aber der Logarithmus erfüllt sie in größerer Ausdehnung als der Numerus.

4.

Es ist erwähnt worden, daß die Rechnung unterhalb $x = 10$ nur als sechsstellig zu betrachten ist, auch wenn mehr Dezimalstellen mitgenommen worden sind. Mithin dürfte eine generelle Prüfung der Genauigkeit erwünscht sein.

Hierzu wurden für $x = 1, 2, 3, \ldots 9, 10$ die L_0 und L_1 zehnstellig gerechnet und diese Werte mit denjenigen L_0 und L_1 verglichen, welche den Tafeln zugrunde liegen. Aus den so erhaltenen Verbesserungen ΔL_0 und ΔL_1 folgt dann

	$\frac{\Delta L_0}{L_0}$	$\frac{\Delta L_1}{L_1}$
$x = 1$	$-0.10 \cdot 10^{-6}$	$+1.07 \cdot 10^{-6}$
2	$+0.13$ »	$+1.17$ »
3	$+0.73$	$+0.81$ »
4	$+0.17$	$+0.12$ »
5	$+0.80$ »	$+0.40$ »
6	$+0.55$ »	$+1.09$ »
7	$+1.30$ »	$+1.30$ »
8	$+0.97$ »	$+0.74$ »
9	$+1.15$ »	$+1.57$ »
10	$+1.29$ »	$+1.80$ »

Geht man auf den Briggischen Logarithmus über, so verkleinern sich diese Zahlen mit dem Faktor 0.4343. Da die Tafeln den Logarithmus geben, so darf man sie mit höherem Recht als sechsstellige bezeichnen, als wenn der Numerus tabuliert worden wäre. Denn die größte erforderliche Verbesserung ist

$$\Delta \log L_1(10) = +0.78 \cdot 10^{-6}.$$

Oberhalb $x = 10$ war die Rechnung durchweg genauer: die semikonvergente Reihe war hinter dem Komma auf sieben Stellen gerechnet worden, der Logarithmus davon wurde mit der siebenstelligen Tafel aufgeschlagen, und die Vielfachen von $\log e$ waren in noch mehr Stellen angesetzt.

Tafeln.

0.00 . . 0.30						0.30 . . 0.60					
x	$\log L_0\, x$		$\log \frac{1}{x} L_1(x)$		x	x	$\log L_0\, x$		$\log \frac{1}{x} L_1\, x$		x
0.00	0.000000		9.698970		0.00	0.30	0.009717	655 21	9.703847	330 11	0.30
		11 32		5 17				676		341	
0.01	0.000011	21	9.698975	12	0.01	0.31	0.010372	21	9.704177	11	0.31
		23 55		10 27				697		351	
0.02	0.000043	21	9.698992	11	0.02	0.32	0.011048	21	9.704518	10	0.32
		76		38				717		362	
0.03	0.000098	21	9.699019	11	0.03	0.33	0.011745	20	9.704869	11	0.33
		97		49				738		372	
0.04	0.000174	21	9.699057	10	0.04	0.34	0.012462	21	9.705231	10	0.34
		120		59				759		383	
0.05	0.000271	23	9.699106	10	0.05	0.35	0.013200	21	9.705603	11	0.35
		141		71				779		394	
0.06	0.000391	21	9.699165	12	0.06	0.36	0.013959	20	9.705986	11	0.36
		162		81				800		405	
0.07	0.000532	21	9.699236	10	0.07	0.37	0.014738	21	9.706380	11	0.37
		185		93				821		415	
0.08	0.000694	23	9.699317	12	0.08	0.38	0.015538	21	9.706785	10	0.38
		206		103				842		427	
0.09	0.000879	21	9.699410	10	0.09	0.39	0.016359	21	9.707200	12	0.39
		228		114				862		437	
0.10	0.001085	22	9.699513	11	0.10	0.40	0.017201	20	9.707627	10	0.40
		249		124				882		447	
0.11	0.001313	21	9.699627	10	0.11	0.41	0.018063	20	9.708064	10	0.41
		270		136				903		458	
0.12	0.001562	21	9.699751	12	0.12	0.42	0.018945	21	9.708511	11	0.42
		293		146				923		469	
0.13	0.001832	23	9.699887	10	0.13	0.43	0.019848	20	9.708969	11	0.43
		314		158				943		479	
0.14	0.002125	21	9.700033	12	0.14	0.44	0.020771	20	9.709438	10	0.44
		336		168				964		490	
0.15	0.002439	22	9.700191	10	0.15	0.45	0.021714	21	9.709917	11	0.45
		357		179				983		501	
0.16	0.002775	21	9.700359	11	0.16	0.46	0.022678	19	9.710407	11	0.46
		378		190				1003		511	
0.17	0.003132	21	9.700538	11	0.17	0.47	0.023661	20	9.710908	10	0.47
		400		200				1023		521	
0.18	0.003510	22	9.700728	10	0.18	0.48	0.024664	20	9.711419	10	0.48
		422		211				1044		532	
0.19	0.003910	22	9.700928	11	0.19	0.49	0.025687	21	9.711940	11	0.49
		443		222				1063		543	
0.20	0.004332	21	9.701139	11	0.20	0.50	0.026731	19	9.712472	11	0.50
		464		234				1083		553	
0.21	0.004775	21	9.701361	12	0.21	0.51	0.027794	20	9.713015	10	0.51
		486		244				1102		563	
0.22	0.005239	22	9.701595	10	0.22	0.52	0.028877	19	9.713568	10	0.52
		506		254				1122		574	
0.23	0.005725	20	9.701839	10	0.23	0.53	0.029979	20	9.714131	11	0.53
		528		265				1142		585	
0.24	0.006231	22	9.702093	11	0.24	0.54	0.031101	20	9.714705	11	0.54
		550		277				1161		595	
0.25	0.006759	22	9.702358	12	0.25	0.55	0.032243	19	9.715290	10	0.55
		570		286				1180		605	
0.26	0.007309	20	9.702635	9	0.26	0.56	0.033404	19	9.715885	10	0.56
		591		298				1200		616	
0.27	0.007879	21	9.702921	12	0.27	0.57	0.034584	20	9.716490	11	0.57
		613		309				1218		626	
0.28	0.008470	22	9.703219	11	0.28	0.58	0.035784	18	9.717106	10	0.58
		634		319				1238		637	
0.29	0.009083	21	9.703528	10	0.29	0.59	0.037002	20	9.717732	11	0.59
0.30	0.009717	21	9.703847	11	0.30	0.60	0.038240	19	9.718369	10	0.60

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
	0.60 . . 0.90				
0.60	0.038240	19	9.718369	10	0.60
	1257		647		
0.61	0.039497	20	9.719016	10	0.61
	1277		657		
0.62	0.040774	18	9.719673	11	0.62
	1295		668		
0.63	0.042069	18	9.720341	10	0.63
	1313		678		
0.64	0.043382	20	9.721019	10	0.64
	1333		688		
0.65	0.044715	18	9.721707	11	0.65
	1351		699		
0.66	0.046066	19	9.722406	11	0.66
	1370		710		
0.67	0.047436	18	9.723116	9	0.67
	1388		719		
0.68	0.048824	18	9.723835	11	0.68
	1406		730		
0.69	0.050230	19	9.724565	10	0.69
	1425		740		
0.70	0.051655	18	9.725305	10	0.70
	1443		750		
0.71	0.053098	18	9.726055	10	0.71
	1461		760		
0.72	0.054559	19	9.726815	10	0.72
	1480		770		
0.73	0.056039	17	9.727585	11	0.73
	1497		781		
0.74	0.057536	18	9.728366	10	0.74
	1515		791		
0.75	0.059051	18	9.729157	10	0.75
	1533		801		
0.76	0.060584	17	9.729958	10	0.76
	1550		811		
0.77	0.062134	18	9.730769	10	0.77
	1568		821		
0.78	0.063702	17	9.731590	10	0.78
	1585		831		
0.79	0.065287	18	9.732421	10	0.79
	1603		841		
0.80	0.066890	18	9.733262	10	0.80
	1621		851		
0.81	0.068511	16	9.734113	11	0.81
	1637		862		
0.82	0.070148	17	9.734975	9	0.82
	1654		871		
0.83	0.071802	17	9.735846	10	0.83
	1671		881		
0.84	0.073473	18	9.736727	11	0.84
	1689		892		
0.85	0.075162	17	9.737619	9	0.85
	1706		901		
0.86	0.076868	16	9.738520	10	0.86
	1722		911		
0.87	0.078590	17	9.739431	10	0.87
	1739		921		
0.88	0.080329	16	9.740352	11	0.88
	1755		932		
0.89	0.082084	17	9.741284	9	0.89
	1772		941		
0.90	0.083856	16	9.742225	9	0.90

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
	0.90 . . 1.20				
0.90	0.083856	16	9.742225	9	0.90
	1788		950		
0.91	0.085644	16	9.743175	10	0.91
	1804		960		
0.92	0.087448	16	9.744135	11	0.92
	1820		971		
0.93	0.089268	17	9.745106	9	0.93
	1837		980		
0.94	0.091105	15	9.746086	10	0.94
	1852		990		
0.95	0.092957	17	9.747076	10	0.95
	1869		1000		
0.96	0.094826	15	9.748076	9	0.96
	1884		1009		
0.97	0.096710	16	9.749085	10	0.97
	1900		1019		
0.98	0.098610	15	9.750104	9	0.98
	1915		1028		
0.99	0.100525	16	9.751132	10	0.99
	1931		1038		
1.00	0.102456	15	9.752170	10	1.00
	1946		1048		
1.01	0.104402	16	9.753218	10	1.01
	1962		1058		
1.02	0.106364	15	9.754276	9	1.02
	1977		1067		
1.03	0.108341	15	9.755343	10	1.03
	1992		1077		
1.04	0.110333	15	9.756420	9	1.04
	2007		1086		
1.05	0.112340	14	9.757506	10	1.05
	2021		1096		
1.06	0.114361	16	9.758602	10	1.06
	2037		1106		
1.07	0.116398	15	9.759708	8	1.07
	2052		1114		
1.08	0.118450	14	9.760822	10	1.08
	2066		1124		
1.09	0.120516	14	9.761946	10	1.09
	2080		1134		
1.10	0.122596	15	9.763080	9	1.10
	2095		1143		
1.11	0.124691	14	9.764223	9	1.11
	2109		1152		
1.12	0.126800	14	9.765375	10	1.12
	2123		1162		
1.13	0.128923	15	9.766537	9	1.13
	2138		1171		
1.14	0.131061	13	9.767708	9	1.14
	2151		1180		
1.15	0.133212	14	9.768888	10	1.15
	2165		1190		
1.16	0.135377	15	9.770078	9	1.16
	2180		1199		
1.17	0.137557	13	9.771277	9	1.17
	2193		1208		
1.18	0.139750	14	9.772485	9	1.18
	2207		1217		
1.19	0.141957	13	9.773702	10	1.19
	2220		1227		
1.20	0.144177	14	9.774929	9	1.20

1.20 . . 1.50

x	$\log L_0(x)$		$\log \frac{1}{x} L_1(x)$		x
1.20	0.144177	14	9.774929	9	1.20
		2231		1236	
1.21	0.146411	13	9.776165	9	1.21
		2217		1245	
1.22	0.148658	14	0.777410	9	1.22
		2261		1254	
1.23	0.150919	12	9.778664	9	1.23
		2273		1263	
1.24	0.153192	14	9.779927	9	1.24
		2287		1272	
1.25	0.155479	12	9.781199	9	1.25
		2299		1281	
1.26	0.157778	13	9.782480	9	1.26
		2312		1290	
1.27	0.160090	13	9.783770	9	1.27
		2325		1299	
1.28	0.162415	13	9.785069	9	1.28
		2338		1308	
1.29	0.164753	13	9.786377	9	1.29
		2351		1317	
1.30	0.167104	12	9.787694	9	1.30
		2363		1326	
1.31	0.169467	12	9.789020	9	1.31
		2375		1335	
1.32	0.171842	13	9.790355	9	1.32
		2388		1344	
1.33	0.174230	12	9.791699	9	1.33
		2400		1353	
1.34	0.176630	12	9.793052	8	1.34
		2412		1361	
1.35	0.179042	12	9.794413	9	1.35
		2424		1370	
1.36	0.181466	13	9.795783	9	1.36
		2437		1379	
1.37	0.183903	11	9.797162	8	1.37
		2448		1387	
1.38	0.186351	11	9.798549	9	1.38
		2459		1396	
1.39	0.188810	13	9.799945	9	1.39
		2472		1405	
1.40	0.191282	11	9.801350	9	1.40
		2483		1414	
1.41	0.193765	12	9.802764	9	1.41
		2495		1423	
1.42	0.196260	11	9.804187	8	1.42
		2506		1431	
1.43	0.198766	11	9.805618	8	1.43
		2517		1439	
1.44	0.201283	12	9.807057	9	1.44
		2529		1448	
1.45	0.203812	11	9.808505	9	1.45
		2540		1457	
1.46	0.206352	10	9.809962	8	1.46
		2550		1465	
1.47	0.208902	12	9.811427	8	1.47
		2562		1473	
1.48	0.211464	11	9.812900	9	1.48
		2573		1482	
1.49	0.214037	10	9.814382	8	1.49
		2583		1490	
1.50	0.216620	12	9.815872	9	1.50

1.50 . . 1.80

x	$\log L_0(x)$		$\log \frac{1}{x} L_1(x)$		x
1.50	0.216620	12	9.815872	9	1.50
		2595		1499	
1.51	0.219215	10	9.817371	9	1.51
		2605		1508	
1.52	0.221820	11	9.818879	8	1.52
		2616		1516	
1.53	0.224436	10	9.820395	7	1.53
		2626		1523	
1.54	0.227062	10	9.821918	9	1.54
		2636		1532	
1.55	0.229698	11	9.823450	8	1.55
		2647		1540	
1.56	0.232345	10	9.824990	9	1.56
		2657		1549	
1.57	0.235002	10	9.826539	8	1.57
		2667		1557	
1.58	0.237669	10	9.828096	8	1.58
		2677		1565	
1.59	0.240346	10	9.829661	8	1.59
		2687		1573	
1.60	0.243033	10	9.831234	8	1.60
		2697		1581	
1.61	0.245730	10	9.832815	8	1.61
		2707		1589	
1.62	0.248437	10	9.834404	8	1.62
		2717		1597	
1.63	0.251154	10	9.836001	9	1.63
		2727		1606	
1.64	0.253881	9	9.837607	8	1.64
		2736		1614	
1.65	0.256617	9	9.839221	8	1.65
		2745		1622	
1.66	0.259362	10	9.840843	7	1.66
		2755		1629	
1.67	0.262117	9	9.842472	8	1.67
		2764		1637	
1.68	0.264881	10	9.844109	9	1.68
		2774		1646	
1.69	0.267655	9	9.845755	7	1.69
		2783		1653	
1.70	0.270438	9	9.847408	8	1.70
		2792		1661	
1.71	0.273230	9	9.849069	8	1.71
		2801		1669	
1.72	0.276031	9	9.850738	8	1.72
		2810		1677	
1.73	0.278841	9	9.852415	7	1.73
		2819		1684	
1.74	0.281660	9	9.854099	8	1.74
		2828		1692	
1.75	0.284488	8	9.855791	8	1.75
		2836		1700	
1.76	0.287324	9	9.857491	8	1.76
		2845		1708	
1.77	0.290169	9	9.859199	8	1.77
		2854		1716	
1.78	0.293023	9	9.860915	7	1.78
		2863		1723	
1.79	0.295886	8	9.862638	7	1.79
		2871		1730	
1.80	0.298757	8	9.864368	8	1.80

1.80 . . 2.10

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
1.80	0.298757	8	9.864368	8	1.80
		2879		1738	
1.81	0.301636	9	9.866106	8	1.81
		2888		1746	
1.82	0.304524	8	9.867852	8	1.82
		2896		1754	
1.83	0.307420	8	9.869606	7	1.83
		2904		1761	
1.84	0.310324	9	9.871367	7	1.84
		2913		1768	
1.85	0.313237	7	9.873135	8	1.85
		2920		1776	
1.86	0.316157	8	9.874911	7	1.86
		2928		1783	
1.87	0.319085	8	9.876694	8	1.87
		2936		1791	
1.88	0.322021	9	9.878485	7	1.88
		2945		1798	
1.89	0.324966	7	9.880283	7	1.89
		2952		1805	
1.90	0.327918	8	9.882088	8	1.90
		2960		1813	
1.91	0.330878	8	9.883901	7	1.91
		2968		1820	
1.92	0.333846	7	9.885721	7	1.92
		2975		1827	
1.93	0.336821	8	9.887548	8	1.93
		2983		1835	
1.94	0.339804	7	9.889383	7	1.94
		2990		1842	
1.95	0.342794	8	9.891225	7	1.95
		2998		1849	
1.96	0.345792	7	9.893074	7	1.96
		3005		1856	
1.97	0.348797	7	9.894930	7	1.97
		3012		1863	
1.98	0.351809	8	9.896793	7	1.98
		3020		1870	
1.99	0.354829	7	9.898663	8	1.99
		3027		1878	
2.00	0.357856	7	9.900541	7	2.00
		3034		1885	
2.01	0.360890	6	9.902426	6	2.01
		3040		1891	
2.02	0.363930	8	9.904317	8	2.02
		3048		1899	
2.03	0.366978	8	9.906216	7	2.03
		3056		1906	
2.04	0.370034	6	9.908122	6	2.04
		3062		1912	
2.05	0.373096	7	9.910034	7	2.05
		3069		1919	
2.06	0.376165	6	9.911953	8	2.06
		3075		1927	
2.07	0.379240	7	9.913880	6	2.07
		3082		1933	
2.08	0.382322	7	9.915813	7	2.08
		3089		1940	
2.09	0.385411	7	9.917753	7	2.09
		3096		1947	
2.10	0.388507	6	9.919700	7	2.10

2.10 . . 2.40

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
2.10	0.388507	6	9.919700	7	2.10
		3102		1954	
2.11	0.391609	6	9.921654	7	2.11
		3108		1961	
2.12	0.394717	7	9.923615	6	2.12
		3115		1967	
2.13	0.397832	7	9.925582	7	2.13
		3122		1974	
2.14	0.400954	6	9.927556	7	2.14
		3128		1981	
2.15	0.404082	6	9.929537	7	2.15
		3134		1988	
2.16	0.407216	6	9.931525	6	2.16
		3140		1994	
2.17	0.410356	7	9.933519	7	2.17
		3147		2001	
2.18	0.413503	5	9.935520	6	2.18
		3152		2007	
2.19	0.416655	7	9.937527	7	2.19
		3159		2014	
2.20	0.419814	6	9.939541	6	2.20
		3165		2020	
2.21	0.422979	5	9.941561	7	2.21
		3170		2027	
2.22	0.426149	7	9.943588	7	2.22
		3177		2034	
2.23	0.429326	6	9.945622	6	2.23
		3183		2040	
2.24	0.432509	6	9.947662	6	2.24
		3189		2046	
2.25	0.435698	5	9.949708	7	2.25
		3194		2053	
2.26	0.438892	6	9.951761	6	2.26
		3200		2059	
2.27	0.442092	6	9.953820	7	2.27
		3206		2066	
2.28	0.445298	5	9.955886	6	2.28
		3211		2072	
2.29	0.448509	6	9.957958	6	2.29
		3217		2078	
2.30	0.451726	6	9.960036	7	2.30
		3223		2085	
2.31	0.454949	4	9.962121	6	2.31
		3227		2091	
2.32	0.458176	6	9.964212	6	2.32
		3233		2097	
2.33	0.461409	6	9.966309	6	2.33
		3239		2103	
2.34	0.464648	6	9.968412	7	2.34
		3245		2110	
2.35	0.467893	5	9.970522	5	2.35
		3250		2115	
2.36	0.471143	5	9.972637	7	2.36
		3255		2122	
2.37	0.474398	5	9.974759	7	2.37
		3260		2129	
2.38	0.477658	5	9.976888	5	2.38
		3265		2134	
2.39	0.480923	6	9.979022	6	2.39
		3271		2140	
2.40	0.484194	4	9.981162	6	2.40

2.40 . . 2.70							2.70 . . 3.00						
x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x		x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1(x)$		x	
2.40	0.484194	4	9.981162	6	2.40		2.70	0.584517	5	0.048083	5	2.70	
		3275		2146					3412		2317		
2.41	0.487469	6	9.983308	6	2.41		2.71	0.587929	4	0.050400	6	2.71	
		3281		2152					3416		2323		
2.42	0.490750	5	9.985460	7	2.42		2.72	0.591345	4	0.052723	5	2.72	
		3286		2159					3420		2328		
2.43	0.494036	5	9.987619	5	2.43		2.73	0.594765	4	0.055051	5	2.73	
		3291		2164					3424		2333		
2.44	0.497327	5	9.989783	7	2.44		2.74	0.598189	3	0.057384	6	2.74	
		3296		2171					3427		2339		
2.45	0.500623	5	9.991954	5	2.45		2.75	0.601616	1	0.059723	5	2.75	
		3301		2176					3431		2344		
2.46	0.503924	4	9.994130	6	2.46		2.76	0.605047	4	0.062067	5	2.76	
		3305		2182					3435		2349		
2.47	0.507229	6	9.996312	6	2.47		2.77	0.608482	4	0.064416	5	2.77	
		3311		2188					3439		2354		
2.48	0.510540	4	9.998500	6	2.48		2.78	0.611921	4	0.066770	6	2.78	
		3315		2194					3443		2360		
2.49	0.513855	4	0.000694	6	2.49		2.79	0.615364	4	0.069130	4	2.79	
		3319		2200					3447		2364		
2.50	0.517174	6	0.002894	6	2.50		2.80	0.618811	3	0.071494	6	2.80	
		3325		2206					3450		2370		
2.51	0.520499	5	0.005100	5	2.51		2.81	0.622261	4	0.073864	6	2.81	
		3330		2211					3454		2376		
2.52	0.523829	4	0.007311	7	2.52		2.82	0.625715	1	0.076240	4	2.82	
		3334		2218					3458		2380		
2.53	0.527163	4	0.009529	5	2.53		2.83	0.629173	3	0.078620	5	2.83	
		3338		2223					3461		2385		
2.54	0.530501	5	0.011752	5	2.54		2.84	0.632634	4	0.081005	6	2.84	
		3343		2228					3465		2391		
2.55	0.533844	5	0.013980	6	2.55		2.85	0.636099	4	0.083396	4	2.85	
		3348		2234					3469		2395		
2.56	0.537192	1	0.016214	7	2.56		2.86	0.639568	3	0.085791	5	2.86	
		3352		2241					3472		2400		
2.57	0.540544	5	0.018455	5	2.57		2.87	0.643040	1	0.088191	6	2.87	
		3357		2246					3476		2406		
2.58	0.543901	5	0.020701	5	2.58		2.88	0.646516	3	0.090597	4	2.88	
		3362		2251					3479		2410		
2.59	0.547263	3	0.022952	6	2.59		2.89	0.649995	4	0.093007	5	2.89	
		3365		2257					3483		2415		
2.60	0.550628	5	0.025209	6	2.60		2.90	0.653478	3	0.095422	6	2.90	
		3370		2263					3486		2421		
2.61	0.553998	4	0.027472	5	2.61		2.91	0.656964	4	0.097843	5	2.91	
		3374		2268					3490		2426		
2.62	0.557372	1	0.029740	5	2.62		2.92	0.660454	3	0.100269	4	2.92	
		3378		2273					3493		2430		
2.63	0.560750	5	0.032013	6	2.63		2.93	0.663947	3	0.102699	4	2.93	
		3383		2279					3496		2434		
2.64	0.564133	1	0.034292	6	2.64		2.94	0.667443	3	0.105133	6	2.94	
		3387		2285					3499		2440		
2.65	0.567520	4	0.036577	5	2.65		2.95	0.670942	4	0.107573	6	2.95	
		3391		2290					3503		2446		
2.66	0.570911	5	0.038867	6	2.66		2.96	0.674445	4	0.110019	4	2.96	
		3396		2296					3507		2450		
2.67	0.574307	4	0.041163	5	2.67		2.97	0.677952	2	0.112469	4	2.97	
		3400		2301					3509		2454		
2.68	0.577707	3	0.043464	6	2.68		2.98	0.681461	4	0.114923	5	2.98	
		3403		2307					3513		2459		
2.69	0.581110	1	0.045771	5	2.69		2.99	0.684974	3	0.117382	5	2.99	
		3407		2312					3516		2464		
2.70	0.584517	5	0.048083	5	2.70		3.00	0.688490	3	0.119846	5	3.00	

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
3.00	0.688490	3519	0.119846	2469 5	3.00
3.01	0.692009	3523	0.122315	2471 5	3.01
3.02	0.695532	3526	0.124789	2478 4	3.02
3.03	0.699058	3529	0.127267	2483 5	3.03
3.04	0.702587	3531	0.129750	2488 5	3.04
3.05	0.706118	3535	0.132238	2492 4	3.05
3.06	0.709653	3539	0.134730	2496 1	3.06
3.07	0.713192	3541	0.137226	2502 6	3.07
3.08	0.716733	3544	0.139728	2507 5	3.08
3.09	0.720277	3548	0.142235	2511 4	3.09
3.10	0.723825	3550	0.144746	2515 4	3.10
3.11	0.727375	3553	0.147261	2520 5	3.11
3.12	0.730928	3556	0.149781	2525 5	3.12
3.13	0.734484	3559	0.152306	2529 4	3.13
3.14	0.738043	3562	0.154835	2533 1	3.14
3.15	0.741605	3565	0.157368	2538 5	3.15
3.16	0.745170	3567	0.159906	2542 1	3.16
3.17	0.748737	3571	0.162448	2547 5	3.17
3.18	0.752308	3573	0.164995	2551 1	3.18
3.19	0.755881	3575	0.167546	2555 4	3.19
3.20	0.759456	3579	0.170101	2560 5	3.20
3.21	0.763035	3582	0.172661	2565 5	3.21
3.22	0.766617	3584	0.175226	2569 4	3.22
3.23	0.770201	3587	0.177795	2573 1	3.23
3.24	0.773788	3590	0.180368	2577 4	3.24
3.25	0.777378	3593	0.182945	2582 5	3.25
3.26	0.780971	3595	0.185527	2586 1	3.26
3.27	0.784566	3598	0.188113	2590 1	3.27
3.28	0.788164	3601	0.190703	2594 1	3.28
3.29	0.791765	3603	0.193297	2599 5	3.29
3.30	0.795368		0.195896	4	3.30

3.00 . . 3.30

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
3.30	0.795368	3605	0.195896	2603 1	3.30
3.31	0.798973	3608	0.198499	2607 1	3.31
3.32	0.802581	3611	0.201106	2611 1	3.32
3.33	0.806192	3614	0.203717	2616 5	3.33
3.34	0.809806	3616	0.206333	2620 1	3.34
3.35	0.813422	3618	0.208953	2624 4	3.35
3.36	0.817040	3621	0.211577	2628 1	3.36
3.37	0.820661	3623	0.214205	2631 3	3.37
3.38	0.824284	3626	0.216836	2636 5	3.38
3.39	0.827910	3628	0.219472	2640 1	3.39
3.40	0.831538	3630	0.222112	2644 1	3.40
3.41	0.835168	3633	0.224756	2648 1	3.41
3.42	0.838801	3636	0.227404	2652 1	3.42
3.43	0.842437	3637	0.230056	2657 5	3.43
3.44	0.846074	3640	0.232713	2660 3	3.44
3.45	0.849714	3643	0.235373	2664 4	3.45
3.46	0.853357	3645	0.238037	2667 3	3.46
3.47	0.857002	3647	0.240704	2672 5	3.47
3.48	0.860649	3649	0.243376	2676 4	3.48
3.49	0.864298	3652	0.246052	2680 4	3.49
3.50	0.867950	3654	0.248732	2684 1	3.50
3.51	0.871604	3657	0.251416	2688 4	3.51
3.52	0.875261	3658	0.254104	2691 3	3.52
3.53	0.878919	3661	0.256795	2695 4	3.53
3.54	0.882580	3663	0.259490	2699 4	3.54
3.55	0.886243	3665	0.262189	2703 1	3.55
3.56	0.889908	3667	0.264892	2707 1	3.56
3.57	0.893575	3670	0.267599	2710 3	3.57
3.58	0.897245	3671	0.270309	2714 1	3.58
3.59	0.900916	3674	0.273023	2718 4	3.59
3.60	0.904590		0.275741	4	3.60

3.30 . . 3.60

3.60 . . 3.90					3.90 . . 4.20				
x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x	x	$\log L_0 x$	$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
3.60	0.904590		0.275741		3.60	3.90	1.015735	0.358949		3.90
		3676		2722					2827	
3.61	0.908266		0.278463	3	3.61	3.91	1.019469	0.361776	3	3.91
		3678		2725					2830	
3.62	0.911944		0.281188	1	3.62	3.92	1.023204	0.364606	1	3.92
		3680		2729					2834	
3.63	0.915624		0.283917	1	3.63	3.93	1.026942	0.367440	3	3.93
		3682		2733					2837	
3.64	0.919306		0.286650	3	3.64	3.94	1.030681	0.370277	3	3.94
		3685		2736					2840	
3.65	0.922991		0.289386	1	3.65	3.95	1.034423	0.373117	3	3.95
		3686		2740					2843	
3.66	0.926677		0.292126	4	3.66	3.96	1.038166	0.375960	1	3.96
		3688		2744					2847	
3.67	0.930365		0.294870	3	3.67	3.97	1.041910	0.378807	3	3.97
		3691		2747					2850	
3.68	0.934056		0.297617	1	3.68	3.98	1.045655	0.381657	3	3.98
		3692		2751					2853	
3.69	0.937748		0.300368	4	3.69	3.99	1.049402	0.384510	3	3.99
		3695		2755					2856	
3.70	0.941443		0.303123	3	3.70	4.00	1.053152	0.387366	3	4.00
		3696		2758					2859	
3.71	0.945139		0.305881	3	3.71	4.01	1.056903	0.390225	4	4.01
		3698		2761					2863	
3.72	0.948837		0.308642	4	3.72	4.02	1.060656	0.393088	3	4.02
		3701		2765					2866	
3.73	0.952538		0.311407	4	3.73	4.03	1.064410	0.395954	3	4.03
		3702		2769					2869	
3.74	0.956240		0.314176	4	3.74	4.04	1.068166	0.398823	3	4.04
		3705		2773					2872	
3.75	0.959945		0.316949	3	3.75	4.05	1.071924	0.401695	3	4.05
		3706		2776					2875	
3.76	0.963651		0.319725	3	3.76	4.06	1.075683	0.404570	3	4.06
		3708		2779					2878	
3.77	0.967359		0.322504	4	3.77	4.07	1.079444	0.407448	4	4.07
		3710		2783					2882	
3.78	0.971069		0.325287	4	3.78	4.08	1.083207	0.410330	2	4.08
		3712		2787					2884	
3.79	0.974781		0.328074	3	3.79	4.09	1.086971	0.413214	4	4.09
		3714		2790					2888	
3.80	0.978495		0.330864	3	3.80	4.10	1.090737	0.416102	3	4.10
		3715		2793					2891	
3.81	0.982210		0.333657	3	3.81	4.11	1.094504	0.418993	2	4.11
		3718		2796					2893	
3.82	0.985928		0.336453	4	3.82	4.12	1.098273	0.421886	4	4.12
		3720		2800					2897	
3.83	0.989648		0.339253	4	3.83	4.13	1.102043	0.424783	3	4.13
		3721		2804					2900	
3.84	0.993369		0.342057	3	3.84	4.14	1.105815	0.427683	3	4.14
		3723		2807					2903	
3.85	0.997092		0.344864	3	3.85	4.15	1.109588	0.430586	3	4.15
		3725		2810					2906	
3.86	1.000817		0.347674	1	3.86	4.16	1.113363	0.433492	2	4.16
		3727		2811					2908	
3.87	1.004544		0.350488	3	3.87	4.17	1.117140	0.436400	1	4.17
		3728		2817					2912	
3.88	1.008272		0.353305	3	3.88	4.18	1.120918	0.439312	3	4.18
		3731		2820					2915	
3.89	1.012003		0.356125	4	3.89	4.19	1.124697	0.442227	3	4.19
		3732		2824					2918	
3.90	1.015735		0.358949		3.90	4.20	1.128478	0.445145		4.20

4.20 . . 4.50					4.50 . . 4.80				
x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$	x	x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$	x
4.20	1.128478	3783	0.445145	4.20	4.50	1.242570	3824	0.534004	4.50
4.21	1.132261	3785	0.448066	4.21	4.51	1.246394	3825	0.537008	4.51
4.22	1.136046	3785	0.450990	4.22	4.52	1.250219	3827	0.540015	4.52
4.23	1.139831	3787	0.453916	4.23	4.53	1.254046	3828	0.543025	4.53
4.24	1.143618	3788	0.456846	4.24	4.54	1.257874	3828	0.546038	4.54
4.25	1.147406	3790	0.459778	4.25	4.55	1.261702	3830	0.549053	4.55
4.26	1.151196	3791	0.462713	4.26	4.56	1.265532	3831	0.552070	4.56
4.27	1.154987	3793	0.465652	4.27	4.57	1.269363	3833	0.555090	4.57
4.28	1.158780	3794	0.468593	4.28	4.58	1.273196	3834	0.558112	4.58
4.29	1.162574	3796	0.471537	4.29	4.59	1.277030	3835	0.561138	4.59
4.30	1.166370	3797	0.474484	4.30	4.60	1.280865	3837	0.564166	4.60
4.31	1.170167	3798	0.477433	4.31	4.61	1.284702	3838	0.567196	4.61
4.32	1.173965	3800	0.480386	4.32	4.62	1.288540	3838	0.570229	4.62
4.33	1.177765	3802	0.483342	4.33	4.63	1.292378	3840	0.573264	4.63
4.34	1.181567	3802	0.486300	4.34	4.64	1.296218	3841	0.576302	4.64
4.35	1.185369	3804	0.489260	4.35	4.65	1.300059	3842	0.579343	4.65
4.36	1.189173	3806	0.492223	4.36	4.66	1.303901	3843	0.582386	4.66
4.37	1.192979	3806	0.495190	4.37	4.67	1.307744	3845	0.585431	4.67
4.38	1.196785	3808	0.498160	4.38	4.68	1.311589	3846	0.588479	4.68
4.39	1.200593	3809	0.501132	4.39	4.69	1.315435	3847	0.591529	4.69
4.40	1.204402	3811	0.504107	4.40	4.70	1.319282	3848	0.594582	4.70
4.41	1.208213	3813	0.507084	4.41	4.71	1.323130	3849	0.597637	4.71
4.42	1.212026	3813	0.510064	4.42	4.72	1.326979	3850	0.600695	4.72
4.43	1.215839	3815	0.513047	4.43	4.73	1.330829	3852	0.603755	4.73
4.44	1.219654	3816	0.516033	4.44	4.74	1.334681	3853	0.606818	4.74
4.45	1.223470	3818	0.519022	4.45	4.75	1.338534	3854	0.609883	4.75
4.46	1.227288	3819	0.522013	4.46	4.76	1.342388	3855	0.612950	4.76
4.47	1.231107	3819	0.525007	4.47	4.77	1.346243	3856	0.616020	4.77
4.48	1.234926	3821	0.528003	4.48	4.78	1.350099	3857	0.619092	4.78
4.49	1.238747	3823	0.531002	4.49	4.79	1.353956	3858	0.622167	4.79
4.50	1.242570		0.534004	4.50	4.80	1.357814		0.625244	4.80

4.80 . . 5.10					5.10 . . 5.40				
x	$\log I_0 x$		$\log \frac{1}{x} I_1 x$		x	x	$\log L_0(x)$	$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
4.80	1.357814	3859	0.625244	3080	4.80	5.10	1.474054	0.718622		5.10
4.81	1.361673	3861	0.628324	3081	4.81	5.11	1.477944	0.721769		5.11
4.82	1.365534	3861	0.631405	3084	4.82	5.12	1.481835	0.724918		5.12
4.83	1.369395	3863	0.634489	3088	4.83	5.13	1.485727	0.728070		5.13
4.84	1.373258	3864	0.637577	3089	4.84	5.14	1.489620	0.731223		5.14
4.85	1.377122	3865	0.640666	3091	4.85	5.15	1.493514	0.734378		5.15
4.86	1.380987	3865	0.643757	3093	4.86	5.16	1.497409	0.737536		5.16
4.87	1.384852	3867	0.646850	3096	4.87	5.17	1.501305	0.740695		5.17
4.88	1.388719	3868	0.649946	3098	4.88	5.18	1.505202	0.743856		5.18
4.89	1.392587	3870	0.653044	3100	4.89	5.19	1.509100	0.747020		5.19
4.90	1.396457	3870	0.656144	3103	4.90	5.20	1.512998	0.750186		5.20
4.91	1.400327	3871	0.659247	3105	4.91	5.21	1.516898	0.753354		5.21
4.92	1.404198	3872	0.662352	3107	4.92	5.22	1.520799	0.756524		5.22
4.93	1.408070	3873	0.665459	3109	4.93	5.23	1.524701	0.759696		5.23
4.94	1.411943	3875	0.668568	3112	4.94	5.24	1.528603	0.762870		5.24
4.95	1.415818	3875	0.671680	3114	4.95	5.25	1.532506	0.766046		5.25
4.96	1.419693	3877	0.674794	3116	4.96	5.26	1.536410	0.769224		5.26
4.97	1.423570	3877	0.677910	3119	4.97	5.27	1.540315	0.772404		5.27
4.98	1.427447	3879	0.681029	3121	4.98	5.28	1.544221	0.775586		5.28
4.99	1.431326	3879	0.684150	3123	4.99	5.29	1.548128	0.778771		5.29
5.00	1.435205	3880	0.687273	3125	5.00	5.30	1.552036	0.781957		5.30
5.01	1.439085	3882	0.690398	3127	5.01	5.31	1.555944	0.785145		5.31
5.02	1.442967	3882	0.693525	3130	5.02	5.32	1.559854	0.788335		5.32
5.03	1.446849	3883	0.696655	3131	5.03	5.33	1.563765	0.791527		5.33
5.04	1.450732	3885	0.699786	3134	5.04	5.34	1.567676	0.794721		5.34
5.05	1.454617	3886	0.702920	3137	5.05	5.35	1.571588	0.797917		5.35
5.06	1.458503	3886	0.706057	3138	5.06	5.36	1.575502	0.801115		5.36
5.07	1.462389	3887	0.709195	3140	5.07	5.37	1.579416	0.804316		5.37
5.08	1.466276	3888	0.712335	3143	5.08	5.38	1.583330	0.807518		5.38
5.09	1.470164	3890	0.715478	3144	5.09	5.39	1.587246	0.810721		5.39
5.10	1.474054		0.718622		5.10	5.40	1.591162	0.813927		5.40

5.40 . . 5.70				5.70 . . 6.00			
x	$\log L_0 x$	$\log \frac{1}{x} L_1 x$	x	x	$\log L_0 x$	$\log \frac{1}{x} L_4 x$	x
5.40	1.591162	0.813927	5.40	5.70	1.709037	0.910975	5.70
	3917	3208			3941	3263	
5.41	1.595079	0.817135	5.41	5.71	1.712978	0.914238	5.71
	3918	3210			3942	3265	
5.42	1.598997	0.820345	5.42	5.72	1.716920	0.917503	5.72
	3920	3211			3943	3266	
5.43	1.602917	0.823556	5.43	5.73	1.720863	0.920769	5.73
	3920	3214			3943	3269	
5.44	1.606837	0.826770	5.44	5.74	1.724806	0.924038	5.74
	3920	3216			3944	3270	
5.45	1.610757	0.829986	5.45	5.75	1.728750	0.927308	5.75
	3922	3217			3945	3272	
5.46	1.614679	0.833203	5.46	5.76	1.732695	0.930580	5.76
	3922	3219			3946	3273	
5.47	1.618601	0.836422	5.47	5.77	1.736641	0.933853	5.77
	3923	3221			3947	3275	
5.48	1.622524	0.839643	5.48	5.78	1.740588	0.937128	5.78
	3924	3223			3947	3277	
5.49	1.626448	0.842866	5.49	5.79	1.744535	0.940405	5.79
	3925	3225			3948	3278	
5.50	1.630373	0.846091	5.50	5.80	1.748483	0.943683	5.80
	3926	3227			3949	3280	
5.51	1.634299	0.849318	5.51	5.81	1.752432	0.946963	5.81
	3926	3229			3949	3282	
5.52	1.638225	0.852547	5.52	5.82	1.756381	0.950245	5.82
	3927	3230			3950	3284	
5.53	1.642152	0.855777	5.53	5.83	1.760331	0.953529	5.83
	3928	3232			3951	3286	
5.54	1.646080	0.859009	5.54	5.84	1.764282	0.956815	5.84
	3929	3235			3952	3287	
5.55	1.650009	0.862244	5.55	5.85	1.768234	0.960102	5.85
	3930	3236			3952	3289	
5.56	1.653939	0.865480	5.56	5.86	1.772186	0.963391	5.86
	3931	3238			3953	3290	
5.57	1.657870	0.868718	5.57	5.87	1.776139	0.966681	5.87
	3931	3240			3954	3292	
5.58	1.661801	0.871958	5.58	5.88	1.780093	0.969973	5.88
	3932	3241			3954	3294	
5.59	1.665733	0.875199	5.59	5.89	1.784047	0.973267	5.89
	3932	3244			3955	3295	
5.60	1.669665	0.878443	5.60	5.90	1.788002	0.976562	5.90
	3934	3245			3956	3297	
5.61	1.673599	0.881688	5.61	5.91	1.791958	0.979859	5.91
	3935	3247			3957	3299	
5.62	1.677534	0.884935	5.62	5.92	1.795915	0.983158	5.92
	3935	3249			3957	3300	
5.63	1.681469	0.888184	5.63	5.93	1.799872	0.986458	5.93
	3936	3250			3958	3302	
5.64	1.685405	0.891434	5.64	5.94	1.803830	0.989760	5.94
	3936	3252			3958	3303	
5.65	1.689341	0.894686	5.65	5.95	1.807788	0.993063	5.95
	3938	3254			3959	3305	
5.66	1.693279	0.897940	5.66	5.96	1.811747	0.996368	5.96
	3938	3257			3960	3307	
5.67	1.697217	0.901197	5.67	5.97	1.815707	0.999675	5.97
	3939	3258			3961	3309	
5.68	1.701156	0.904455	5.68	5.98	1.819668	1.002984	5.98
	3940	3259			3961	3310	
5.69	1.705096	0.907714	5.69	5.99	1.823629	1.006294	5.99
	3941	3261			3962	3312	
5.70	1.709037	0.910975	5.70	6.00	1.827591	1.009606	6.00

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
		6.00 . . 6.30			
6.00	1.827591	3963	1.009606	3313	6.00
6.01	1.831554	3963	1.012919	3315	6.01
6.02	1.835517	3964	1.016234	3316	6.02
6.03	1.839481	3965	1.019550	3318	6.03
6.04	1.843446	3965	1.022868	3320	6.04
6.05	1.847411	3966	1.026188	3322	6.05
6.06	1.851377	3967	1.029510	3322	6.06
6.07	1.855344	3967	1.032832	3324	6.07
6.08	1.859311	3968	1.036156	3326	6.08
6.09	1.863279	3969	1.039482	3328	6.09
6.10	1.867248	3969	1.042810	3329	6.10
6.11	1.871217	3970	1.046139	3331	6.11
6.12	1.875187	3971	1.049470	3332	6.12
6.13	1.879158	3971	1.052802	3334	6.13
6.14	1.883129	3971	1.056136	3335	6.14
6.15	1.887100	3973	1.059471	3336	6.15
6.16	1.891073	3974	1.062807	3338	6.16
6.17	1.895047	3974	1.066145	3340	6.17
6.18	1.899021	3974	1.069485	3342	6.18
6.19	1.902995	3974	1.072827	3343	6.19
6.20	1.906969	3976	1.076170	3344	6.20
6.21	1.910945	3976	1.079514	3346	6.21
6.22	1.914921	3977	1.082859	3348	6.22
6.23	1.918898	3978	1.086207	3349	6.23
6.24	1.922876	3978	1.089556	3350	6.24
6.25	1.926854	3979	1.092906	3352	6.25
6.26	1.930833	3979	1.096258	3353	6.26
6.27	1.934812	3980	1.099611	3355	6.27
6.28	1.938792	3981	1.102966	3356	6.28
6.29	1.942773	3981	1.106322	3358	6.29
6.30	1.946754		1.109680		6.30
		6.30 . . 6.60			
6.30	1.946754	3982	1.109680	3359	6.30
6.31	1.950736	3983	1.113039	3361	6.31
6.32	1.954719	3983	1.116400	3362	6.32
6.33	1.958702	3983	1.119762	3364	6.33
6.34	1.962685	3984	1.123126	3365	6.34
6.35	1.966669	3985	1.126491	3366	6.35
6.36	1.970654	3986	1.129857	3368	6.36
6.37	1.974640	3986	1.133225	3369	6.37
6.38	1.978626	3987	1.136594	3371	6.38
6.39	1.982613	3987	1.139965	3372	6.39
6.40	1.986600	3987	1.143337	3374	6.40
6.41	1.990587	3989	1.146711	3375	6.41
6.42	1.994576	3989	1.150086	3376	6.42
6.43	1.998565	3990	1.153462	3378	6.43
6.44	2.002555	3990	1.156840	3379	6.44
6.45	2.006545	3990	1.160219	3381	6.45
6.46	2.010535	3991	1.163600	3382	6.46
6.47	2.014526	3992	1.166982	3383	6.47
6.48	2.018518	3993	1.170365	3385	6.48
6.49	2.022511	3993	1.173750	3386	6.49
6.50	2.026504	3993	1.177136	3388	6.50
6.51	2.030497	3994	1.180524	3390	6.51
6.52	2.034491	3995	1.183914	3390	6.52
6.53	2.038486	3995	1.187304	3391	6.53
6.54	2.042481	3996	1.190695	3393	6.54
6.55	2.046477	3996	1.194088	3395	6.55
6.56	2.050473	3997	1.197483	3396	6.56
6.57	2.054470	3998	1.200879	3397	6.57
6.58	2.058468	3998	1.204276	3399	6.58
6.59	2.062466	3999	1.207675	3400	6.59
6.60	2.066465		1.211075		6.60

6.60 . . 6.90				6.90 . . 7.20			
x	$\log L_0 x$	$\log \frac{1}{x} L_1 x$	x	x	$\log L_0 x$	$\log \frac{1}{x} L_1 x$	x
6.60	2.066465	1.211075	6.60	6.90	2.186671	1.313680	6.90
	3999	3101			4015	3111	
6.61	2.070464	1.214476	6.61	6.91	2.190686	1.317121	6.91
	3999	3102			4015	3111	
6.62	2.074463	1.217878	6.62	6.92	2.194701	1.320562	6.92
	4000	3104			4016	3112	
6.63	2.078463	1.221282	6.63	6.93	2.198717	1.324004	6.93
	4001	3105			4016	3111	
6.64	2.082464	1.224687	6.64	6.94	2.202733	1.327448	6.94
	4002	3106			4017	3115	
6.65	2.086466	1.228093	6.65	6.95	2.206750	1.330893	6.95
	4002	3108			4017	3116	
6.66	2.090468	1.231501	6.66	6.96	2.210767	1.334339	6.96
	4002	3110			4018	3117	
6.67	2.094470	1.234911	6.67	6.97	2.214785	1.337786	6.97
	4003	3111			4018	3119	
6.68	2.098473	1.238322	6.68	6.98	2.218803	1.341235	6.98
	4004	3112			4019	3120	
6.69	2.102477	1.241734	6.69	6.99	2.222822	1.344685	6.99
	4004	3113			4019	3120	
6.70	2.106481	1.245147	6.70	7.00	2.226841	1.348135	7.00
	4004	3115			4020	3122	
6.71	2.110485	1.248562	6.71	7.01	2.230861	1.351587	7.01
	4005	3116			4020	3123	
6.72	2.114490	1.251978	6.72	7.02	2.234881	1.355040	7.02
	4006	3117			4021	3125	
6.73	2.118496	1.255395	6.73	7.03	2.238902	1.358495	7.03
	4006	3118			4022	3126	
6.74	2.122502	1.258813	6.74	7.04	2.242924	1.361951	7.04
	4007	3119			4022	3127	
6.75	2.126509	1.262232	6.75	7.05	2.246946	1.365408	7.05
	4007	3121			4022	3128	
6.76	2.130516	1.265653	6.76	7.06	2.250968	1.368866	7.06
	4008	3122			4022	3130	
6.77	2.134524	1.269075	6.77	7.07	2.254990	1.372326	7.07
	4008	3124			4023	3130	
6.78	2.138532	1.272499	6.78	7.08	2.259013	1.375786	7.08
	4009	3125			4023	3131	
6.79	2.142541	1.275924	6.79	7.09	2.263036	1.379247	7.09
	4009	3126			4024	3133	
6.80	2.146550	1.279350	6.80	7.10	2.267060	1.382710	7.10
	4009	3127			4025	3135	
6.81	2.150559	1.282777	6.81	7.11	2.271085	1.386175	7.11
	4011	3129			4025	3135	
6.82	2.154570	1.286206	6.82	7.12	2.275110	1.389640	7.12
	4011	3130			4026	3136	
6.83	2.158581	1.289636	6.83	7.13	2.279136	1.393106	7.13
	4011	3131			4026	3137	
6.84	2.162592	1.293067	6.84	7.14	2.283162	1.396573	7.14
	4012	3133			4026	3139	
6.85	2.166604	1.296500	6.85	7.15	2.287188	1.400042	7.15
	4012	3134			4027	3140	
6.86	2.170616	1.299934	6.86	7.16	2.291215	1.403512	7.16
	4013	3134			4027	3141	
6.87	2.174629	1.303368	6.87	7.17	2.295242	1.406983	7.17
	4013	3136			4028	3142	
6.88	2.178642	1.306804	6.88	7.18	2.299270	1.410455	7.18
	4014	3137			4028	3143	
6.89	2.182656	1.310241	6.89	7.19	2.303298	1.413928	7.19
	4015	3139			4029	3145	
6.90	2.186671	1.313680	6.90	7.20	2.307327	1.417403	7.20

7.20 . . 7.50

x	$\log I_0 x$		$\log \frac{1}{x} I_1 x$		x
7.20	2.307327	1029	1.417403	3475	7.20
7.21	2.311356	1030	1.420878	3477	7.21
7.22	2.315386	1030	1.424355	3478	7.22
7.23	2.319416	1031	1.427833	3479	7.23
7.24	2.323447	1031	1.431312	3480	7.24
7.25	2.327478	1031	1.434792	3481	7.25
7.26	2.331509	1032	1.438273	3483	7.26
7.27	2.335541	1033	1.441756	3483	7.27
7.28	2.339574	1033	1.445239	3485	7.28
7.29	2.343607	1033	1.448724	3486	7.29
7.30	2.347640	1033	1.452210	3487	7.30
7.31	2.351673	1034	1.455697	3488	7.31
7.32	2.355707	1035	1.459185	3489	7.32
7.33	2.359742	1035	1.462674	3490	7.33
7.34	2.363777	1035	1.466164	3491	7.34
7.35	2.367812	1036	1.469655	3493	7.35
7.36	2.371848	1036	1.473148	3493	7.36
7.37	2.375884	1037	1.476641	3495	7.37
7.38	2.379921	1037	1.480136	3495	7.38
7.39	2.383958	1038	1.483631	3497	7.39
7.40	2.387996	1038	1.487128	3499	7.40
7.41	2.392034	1038	1.490627	3499	7.41
7.42	2.396072	1039	1.494126	3499	7.42
7.43	2.400111	1039	1.497625	3501	7.43
7.44	2.404150	1040	1.501126	3502	7.44
7.45	2.408190	1040	1.504628	3503	7.45
7.46	2.412230	1041	1.508131	3505	7.46
7.47	2.416271	1041	1.511636	3506	7.47
7.48	2.420312	1042	1.515142	3506	7.48
7.49	2.424354	1042	1.518648	3508	7.49
7.50	2.428396		1.522156		7.50

7.50 . . 7.80

x	$\log I_0 x$		$\log \frac{1}{x} I_1 x$		x
7.50	2.428396	4042	1.522156	3508	7.50
7.51	2.432438	4043	1.525664	3510	7.51
7.52	2.436481	4043	1.529174	3511	7.52
7.53	2.440524	4043	1.532685	3512	7.53
7.54	2.444567	4044	1.536197	3513	7.54
7.55	2.448611	4045	1.539710	3514	7.55
7.56	2.452656	4045	1.543224	3514	7.56
7.57	2.456701	4045	1.546738	3516	7.57
7.58	2.460746	4046	1.550254	3518	7.58
7.59	2.464792	4046	1.553772	3518	7.59
7.60	2.468838	4046	1.557290	3519	7.60
7.61	2.472884	4047	1.560809	3520	7.61
7.62	2.476931	4047	1.564329	3520	7.62
7.63	2.480978	4047	1.567849	3522	7.63
7.64	2.485025	4048	1.571371	3523	7.64
7.65	2.489073	4049	1.574894	3525	7.65
7.66	2.493122	4049	1.578419	3525	7.66
7.67	2.497171	4049	1.581944	3526	7.67
7.68	2.501220	4049	1.585470	3527	7.68
7.69	2.505269	4050	1.588997	3529	7.69
7.70	2.509319	4051	1.592526	3530	7.70
7.71	2.513370	4051	1.596056	3530	7.71
7.72	2.517421	4051	1.599586	3531	7.72
7.73	2.521472	4052	1.603117	3532	7.73
7.74	2.525524	4052	1.606649	3533	7.74
7.75	2.529576	4052	1.610182	3534	7.75
7.76	2.533628	4053	1.613716	3536	7.76
7.77	2.537681	4053	1.617252	3537	7.77
7.78	2.541734	4054	1.620789	3537	7.78
7.79	2.545788	4054	1.624326	3537	7.79
7.80	2.549842		1.627863		7.80

x	$\log L_0(x)$		$\log \frac{1}{x} L_1(x)$		x	x	$\log L_0(x)$		$\log \frac{1}{x} L_1(x)$		x
7.80	2.549842	4054	1.627863	3539	7.80	8.10	2.671636	1065	1.734458	3568	8.10
7.81	2.553896	4055	1.631402	3541	7.81	8.11	2.675701	4066	1.738026	3568	8.11
7.82	2.557951	4055	1.634943	3542	7.82	8.12	2.679767	4066	1.741594	3570	8.12
7.83	2.562006	4056	1.638485	3542	7.83	8.13	2.683833	4067	1.745164	3570	8.13
7.84	2.566062	4056	1.642027	3543	7.84	8.14	2.687900	4067	1.748734	3571	8.14
7.85	2.570118	4056	1.645570	3543	7.85	8.15	2.691967	4067	1.752305	3573	8.15
7.86	2.574174	4056	1.649113	3545	7.86	8.16	2.696034	4067	1.755878	3573	8.16
7.87	2.578230	4057	1.652658	3547	7.87	8.17	2.700101	4068	1.759451	3574	8.17
7.88	2.582287	4058	1.656205	3547	7.88	8.18	2.704169	4069	1.763025	3576	8.18
7.89	2.586345	4058	1.659752	3548	7.89	8.19	2.708238	4069	1.766601	3576	8.19
7.90	2.590403	4058	1.663300	3549	7.90	8.20	2.712307	4069	1.770177	3576	8.20
7.91	2.594461	4058	1.666849	3549	7.91	8.21	2.716376	4069	1.773753	3577	8.21
7.92	2.598519	4059	1.670398	3551	7.92	8.22	2.720445	4069	1.777330	3578	8.22
7.93	2.602578	4059	1.673949	3552	7.93	8.23	2.724514	4070	1.780908	3580	8.23
7.94	2.606637	4060	1.677501	3553	7.94	8.24	2.728584	4070	1.784488	3580	8.24
7.95	2.610697	4060	1.681054	3554	7.95	8.25	2.732654	4071	1.788068	3581	8.25
7.96	2.614757	4060	1.684608	3555	7.96	8.26	2.736725	4071	1.791649	3583	8.26
7.97	2.618817	4061	1.688163	3555	7.97	8.27	2.740796	4072	1.795232	3583	8.27
7.98	2.622878	4061	1.691718	3556	7.98	8.28	2.744868	4072	1.798815	3583	8.28
7.99	2.626939	4062	1.695274	3558	7.99	8.29	2.748940	4072	1.802398	3585	8.29
8.00	2.631001	4062	1.698832	3558	8.00	8.30	2.753012	4072	1.805983	3585	8.30
8.01	2.635063	4062	1.702390	3560	8.01	8.31	2.757084	4073	1.809568	3586	8.31
8.02	2.639125	4062	1.705950	3560	8.02	8.32	2.761157	4073	1.813154	3588	8.32
8.03	2.643187	4063	1.709510	3561	8.03	8.33	2.765230	4073	1.816742	3589	8.33
8.04	2.647250	4064	1.713071	3562	8.04	8.34	2.769303	4074	1.820331	3589	8.34
8.05	2.651314	4064	1.716633	3563	8.05	8.35	2.773377	4074	1.823920	3590	8.35
8.06	2.655378	4064	1.720196	3564	8.06	8.36	2.777451	4074	1.827510	3590	8.36
8.07	2.659442	4064	1.723760	3565	8.07	8.37	2.781525	4075	1.831100	3592	8.37
8.08	2.663506	4065	1.727325	3566	8.08	8.38	2.785600	4075	1.834692	3593	8.38
8.09	2.667571	4065	1.730891	3567	8.09	8.39	2.789675	4076	1.838285	3593	8.39
8.10	2.671636		1.734458		8.10	8.40	2.793751		1.841878		8.40

8.40 . . 8.70

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
8.40	2.793751	4076	1.841878	3594	8.40
8.41	2.797827	4076	1.845472	3595	8.41
8.42	2.801903	4076	1.849067	3596	8.42
8.43	2.805979	4077	1.852663	3597	8.43
8.44	2.810056	4077	1.856260	3598	8.44
8.45	2.814133	4077	1.859858	3598	8.45
8.46	2.818210	4078	1.863456	3600	8.46
8.47	2.822288	4078	1.867056	3600	8.47
8.48	2.826366	4079	1.870656	3601	8.48
8.49	2.830445	4079	1.874257	3601	8.49
8.50	2.834524	4079	1.877858	3603	8.50
8.51	2.838603	4079	1.881461	3604	8.51
8.52	2.842682	4079	1.885065	3605	8.52
8.53	2.846761	4080	1.888670	3605	8.53
8.54	2.850841	4080	1.892275	3605	8.54
8.55	2.854921	4081	1.895880	3607	8.55
8.56	2.859002	4081	1.899487	3608	8.56
8.57	2.863083	4081	1.903095	3608	8.57
8.58	2.867164	4082	1.906703	3610	8.58
8.59	2.871246	4082	1.910313	3611	8.59
8.60	2.875328	4082	1.913924	3611	8.60
8.61	2.879410	4083	1.917535	3611	8.61
8.62	2.883493	4082	1.921146	3612	8.62
8.63	2.887575	4083	1.924758	3613	8.63
8.64	2.891658	4084	1.928371	3615	8.64
8.65	2.895742	4084	1.931986	3615	8.65
8.66	2.899826	4084	1.935601	3616	8.66
8.67	2.903910	4084	1.939217	3616	8.67
8.68	2.907994	4085	1.942833	3617	8.68
8.69	2.912079	4085	1.946450	3619	8.69
8.70	2.916164		1.950069		8.70

8.70 . . 9.00

x	$\log L_0 x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
8.70	2.916164	4086	1.950069	3619	8.70
8.71	2.920250	4085	1.953688	3620	8.71
8.72	2.924335	4085	1.957308	3620	8.72
8.73	2.928420	4086	1.960928	3621	8.73
8.74	2.932506	4087	1.964549	3623	8.74
8.75	2.936593	4087	1.968172	3623	8.75
8.76	2.940680	4087	1.971795	3624	8.76
8.77	2.944767	4088	1.975419	3624	8.77
8.78	2.948855	4088	1.979043	3626	8.78
8.79	2.952943	4088	1.982669	3626	8.79
8.80	2.957031	4088	1.986295	3627	8.80
8.81	2.961119	4088	1.989922	3627	8.81
8.82	2.965207	4089	1.993549	3629	8.82
8.83	2.969296	4090	1.997178	3629	8.83
8.84	2.973386	4090	2.000807	3630	8.84
8.85	2.977476	4089	2.004437	3631	8.85
8.86	2.981565	4090	2.008068	3631	8.86
8.87	2.985655	4090	2.011699	3633	8.87
8.88	2.989745	4091	2.015332	3633	8.88
8.89	2.993836	4092	2.018965	3634	8.89
8.90	2.997928	4091	2.022599	3635	8.90
8.91	3.002019	4092	2.026234	3636	8.91
8.92	3.006111	4092	2.029870	3636	8.92
8.93	3.010203	4092	2.033506	3636	8.93
8.94	3.014295	4092	2.037142	3637	8.94
8.95	3.018387	4093	2.040779	3639	8.95
8.96	3.022480	4093	2.044418	3639	8.96
8.97	3.026573	4093	2.048057	3640	8.97
8.98	3.030666	4094	2.051697	3641	8.98
8.99	3.034760	4094	2.055338	3642	8.99
9.00	3.038854		2.058980		9.00

x	$\log L_{\infty} x$		$\log \frac{1}{x} L_1 x$		x
	9.00 . . 9.30				
9.00	3.038854	4093	2.058980	3642	9.00
9.01	3.042947	4094	2.062622	3643	9.01
9.02	3.047041	4094	2.066265	3644	9.02
9.03	3.051135	4095	2.069909	3644	9.03
9.04	3.055230	4096	2.073553	3645	9.04
9.05	3.059326	4096	2.077198	3646	9.05
9.06	3.063422	4096	2.080844	3647	9.06
9.07	3.067518	4096	2.084491	3648	9.07
9.08	3.071614	4097	2.088139	3648	9.08
9.09	3.075711	4096	2.091787	3648	9.09
9.10	3.079807	4097	2.095435	3650	9.10
9.11	3.083904	4098	2.099085	3650	9.11
9.12	3.088002	4098	2.102735	3652	9.12
9.13	3.092100	4098	2.106387	3652	9.13
9.14	3.096198	4098	2.110039	3652	9.14
9.15	3.100296	4099	2.113691	3654	9.15
9.16	3.104395	4098	2.117345	3654	9.16
9.17	3.108493	4099	2.120999	3654	9.17
9.18	3.112592	4099	2.124653	3655	9.18
9.19	3.116691	4099	2.128308	3656	9.19
9.20	3.120790	4100	2.131964	3658	9.20
9.21	3.124890	4101	2.135622	3658	9.21
9.22	3.128991	4101	2.139280	3658	9.22
9.23	3.133092	4100	2.142938	3659	9.23
9.24	3.137192	4101	2.146597	3660	9.24
9.25	3.141293	4101	2.150257	3660	9.25
9.26	3.145394	4101	2.153917	3662	9.26
9.27	3.149495	4102	2.157579	3662	9.27
9.28	3.153597	4102	2.161241	3662	9.28
9.29	3.157699	4102	2.164903	3663	9.29
9.30	3.161801		2.168566		9.30
	9.30 . . 9.60				
9.30	3.161801	4103	2.168566	3664	9.30
9.31	3.165904	4103	2.172230	3665	9.31
9.32	3.170007	4103	2.175895	3666	9.32
9.33	3.174110	4103	2.179561	3666	9.33
9.34	3.178213	4103	2.183227	3667	9.34
9.35	3.182316	4104	2.186894	3667	9.35
9.36	3.186420	4104	2.190561	3668	9.36
9.37	3.190524	4104	2.194229	3669	9.37
9.38	3.194628	4105	2.197898	3670	9.38
9.39	3.198733	4105	2.201568	3670	9.39
9.40	3.202838	4105	2.205238	3671	9.40
9.41	3.206943	4105	2.208909	3672	9.41
9.42	3.211048	4106	2.212581	3672	9.42
9.43	3.215154	4106	2.216253	3673	9.43
9.44	3.219260	4106	2.219926	3674	9.44
9.45	3.223366	4106	2.223600	3675	9.45
9.46	3.227472	4107	2.227275	3675	9.46
9.47	3.231579	4107	2.230950	3676	9.47
9.48	3.235686	4107	2.234626	3676	9.48
9.49	3.239793	4107	2.238302	3677	9.49
9.50	3.243900	4108	2.241979	3678	9.50
9.51	3.248008	4108	2.245657	3678	9.51
9.52	3.252116	4108	2.249335	3680	9.52
9.53	3.256224	4109	2.253015	3680	9.53
9.54	3.260333	4109	2.256695	3680	9.54
9.55	3.264442	4109	2.260375	3681	9.55
9.56	3.268551	4109	2.264056	3682	9.56
9.57	3.272660	4109	2.267738	3682	9.57
9.58	3.276769	4110	2.271420	3684	9.58
9.59	3.280879	4110	2.275104	3684	9.59
9.60	3.284989		2.278788		9.60

9.60 . . 9.80				9.80 . . 10.00				
x	$\log L_0(x)$	$\log \frac{1}{x} L_1(x)$	x	x	$\log L_0 x$	$\log \frac{1}{x} L_1 x$	x
9.60	3.284989	2.278788	9.60	9.80	3.367241	2.352602	9.80
	4110	3684			4115	3697	
9.61	3.289099	2.282472	9.61	9.81	3.371356	2.356299	9.81
	4111	3685			4115	3699	
9.62	3.293210	2.286157	9.62	9.82	3.375471	2.359998	9.82
	4111	3686			4116	3699	
9.63	3.297321	2.289843	9.63	9.83	3.379587	2.363697	9.83
	4111	3686			4116	3699	
9.64	3.301432	2.293529	9.64	9.84	3.383703	2.367396	9.84
	4111	3688			4116	3700	
9.65	3.305543	2.297217	9.65	9.85	3.387819	2.371096	9.85
	4111	3688			4116	3701	
9.66	3.309654	2.300905	9.66	9.86	3.391935	2.374797	9.86
	4112	3688			4116	3701	
9.67	3.313766	2.304593	9.67	9.87	3.396051	2.378498	9.87
	4112	3689			4117	3702	
9.68	3.317878	2.308282	9.68	9.88	3.400168	2.382200	9.88
	4113	3690			4117	3703	
9.69	3.321991	2.311972	9.69	9.89	3.404285	2.385903	9.89
	4112	3690			4118	3703	
9.70	3.326103	2.315662	9.70	9.90	3.408403	2.389606	9.90
	4112	3692			4118	3704	
9.71	3.330215	2.319354	9.71	9.91	3.412521	2.393310	9.91
	4113	3692			4118	3704	
9.72	3.334328	2.323046	9.72	9.92	3.416639	2.397014	9.92
	4113	3692			4118	3704	
9.73	3.338441	2.326738	9.73	9.93	3.420757	2.400718	9.93
	4113	3693			4118	3706	
9.74	3.342554	2.330431	9.74	9.94	3.424875	2.404424	9.94
	4114	3693			4118	3707	
9.75	3.346668	2.334124	9.75	9.95	3.428993	2.408131	9.95
	4115	3695			4118	3707	
9.76	3.350783	2.337819	9.76	9.96	3.433111	2.411838	9.96
	4114	3695			4119	3707	
9.77	3.354897	2.341514	9.77	9.97	3.437230	2.415545	9.97
	4114	3696			4119	3708	
9.78	3.359011	2.345210	9.78	9.98	3.441349	2.419253	9.98
	4115	3696			4120	3709	
9.79	3.363126	2.348906	9.79	9.99	3.445469	2.422962	9.99
	4115	3696			4120	3710	
9.80	3.367241	2.352602	9.80	10.00	3.449589	2.426672	10.00

Für den konstanten Teil der Differenzen:

1	4342.9
2	8685.8
3	13028.7
4	17371.6
5	21714.5
6	26057.4
7	30400.3
8	34743.2
9	39086.1

x	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1x$		$\log\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1x$		$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1x$		$\log\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1x$		x
				13429				43429	
10.0	1.013291		3.949589		0.961207		3.926672		10.0
		141		— 60		399		+ 180	
10.1	1.013150		3.992958		0.961606		3.970281		10.1
		137		— 58		390		+ 177	
10.2	1.013013		4.036329		0.961996	382	4.013887		10.2
		135		— 58				+ 173	
10.3	1.012878		4.079700		0.962378	374	4.057489	+ 169	10.3
		132		— 56					
10.4	1.012746		4.123073		0.962752	367	4.101087	— 166	10.4
		129		— 55					
10.5	1.012617		4.166447		0.963119	360	4.144682	+ 163	10.5
		126		— 53					
10.6	1.012491		4.209823		0.963479	353	4.188274	+ 159	10.6
		124		— 53					
10.7	1.012367		4.253199		0.963832	347	4.231862	+ 157	10.7
		122		— 52					
10.8	1.012245		4.296576		0.964179	339	4.275448	+ 153	10.8
		119		— 51					
10.9	1.012126		4.339954		0.964518	333	4.319030	+ 151	10.9
		117		— 49					
11.0	1.012009		4.383334		0.964851	327	4.362610	+ 147	11.0
		114		— 49					
11.1	1.011895		4.426714		0.965178	321	4.406186	+ 145	11.1
		113		— 48					
11.2	1.011782		4.470095		0.965499	316	4.449760	+ 142	11.2
		110		— 47					
11.3	1.011672		4.513477		0.965815	309	4.493331	+ 140	11.3
		108		— 46					
11.4	1.011564		4.556860		0.966124	304	4.536900	+ 137	11.4
		107		— 45					
11.5	1.011457		4.600244		0.966428	298	4.580466	+ 134	11.5
		104		— 44					
11.6	1.011353		4.643629		0.966726	293	4.624029	+ 132	11.6
		103		— 44					
11.7	1.011250		4.687014		0.967019	288	4.667590	+ 130	11.7
		100		— 43					
11.8	1.011150		4.730400		0.967307	283	4.711149	+ 128	11.8
		99		— 42					
11.9	1.011051		4.773787		0.967590	278	4.754706	+ 125	11.9
		97		— 41					
12.0	1.010954		4.817175		0.967868		4.798260		12.0

12.0 . . 15.0

x	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi x}e^{-x}L_0(x)$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}L_0(x)$		$\frac{1}{2}\sqrt{\pi x}e^{-x}L_1(x)$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}L_1(x)$		x
				43429				43429	
12.0	1.010954		4.817175		0.967868	4	4.798260		12.0
		96		− 10		274		+ 123	
12.1	1.010858		4.860564		0.968142	5	4.841812		12.1
		93		− 40		269		+ 121	
12.2	1.010765		4.903953		0.968411	5	4.885362		12.2
		92		− 39		261		+ 119	
12.3	1.010673		4.947343		0.968675	4	4.928910		12.3
		91		− 39		260		+ 117	
12.4	1.010582		4.990733		0.968935	5	4.972456		12.4
		89		− 38		255		+ 115	
12.5	1.010493		5.034124		0.969190	3	5.016000		12.5
		88		− 37		252		+ 113	
12.6	1.010405		5.077516		0.969442	5	5.059542		12.6
		86		− 36		247		+ 112	
12.7	1.010319		5.120909		0.969689	3	5.103083		12.7
		84		− 36		244		+ 109	
12.8	1.010235		5.164302		0.969933	5	5.146621		12.8
		81		− 36		239		+ 108	
12.9	1.010151		5.207695		0.970172	3	5.190158		12.9
		82		− 35		236		+ 106	
13.0	1.010069		5.251089		0.970408	4	5.233693		13.0
		80		− 34		232		+ 104	
13.1	1.009989		5.294484		0.970640	4	5.277226		13.1
		80		− 33		228		+ 102	
13.2	1.009909		5.337880		0.970868	3	5.320757		13.2
		78		− 33		225		+ 101	
13.3	1.009831		5.381276		0.971093	4	5.364287		13.3
		77		− 33		221		+ 100	
13.4	1.009754		5.424672		0.971314	2	5.407816		13.4
		75		− 32		219		+ 98	
13.5	1.009679		5.468069		0.971533	5	5.451343		13.5
		75		− 32		214		+ 96	
13.6	1.009604		5.511466		0.971747	2	5.494868		13.6
		73		− 31		212		+ 95	
13.7	1.009531		5.554864		0.971959	4	5.538392		13.7
		72		− 31		208		+ 94	
13.8	1.009459		5.598262		0.972167	3	5.581915		13.8
		71		− 30		205		+ 92	
13.9	1.009388		5.641661		0.972372	2	5.625436		13.9
		71		− 29		203		+ 91	
14.0	1.009317		5.685061		0.972575	1	5.668956		14.0
		69		− 30		199		+ 89	
14.1	1.009248		5.728460		0.972774	3	5.712474		14.1
		68		− 29		196		+ 88	
14.2	1.009180		5.771860		0.972970	2	5.755991		14.2
		67		− 28		194		+ 87	
14.3	1.009113		5.815261		0.973164	3	5.799507		14.3
		66		− 28		191		+ 86	
14.4	1.009047		5.858662		0.973355	3	5.843022		14.4
		65		− 28		188		+ 84	
14.5	1.008982		5.902063		0.973543	2	5.886535		14.5
		64		− 27		186		+ 83	
14.6	1.008918		5.945465		0.973729	3	5.930047		14.6
		63		− 27		183		+ 82	
14.7	1.008855		5.988867		0.973912	3	5.973558		14.7
		63		− 26		180		+ 81	
14.8	1.008792		6.032270		0.974092	2	6.017068		14.8
		61		− 26		178		+ 80	
14.9	1.008731		6.075673		0.974270	3	6.060577		14.9
		61		− 26		175		+ 79	
15.0	1.008670		6.119076		0.974445		6.104085		15.0

15.0 . . 18.0

x	$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_0 x$		$\log \sqrt{x}\, L_0 x$		$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_1 x$		$\log \sqrt{x}\, L_1 x$		x
				43429				43429	
15.0	1.008670		6.119076		0.974445+		6.104085		15.0
		60		−25		174		+77	
15.1	1.008610		6.162480		0.974619		6.147591		15.1
		59		−25		170		+77	
15.2	1.008551		6.205884		0.974789		6.191097		15.2
		58		−25		169		+75	
15.3	1.008493		6.249288		0.974958		6.234601		15.3
		57		−24		166		+75	
15.4	1.008436		6.292693		0.975124		6.278105		15.4
		57		−24		164		+74	
15.5	1.008379		6.336098		0.975288		6.321608		15.5
		56		−23		162		+72	
15.6	1.008323		6.379504		0.975450		6.365109		15.6
		55		−24		160		+72	
15.7	1.008268		6.422909		0.975610		6.408610		15.7
		54		−23		158		+70	
15.8	1.008214		6.466315		0.975768		6.452109		15.8
		54		−22		155		+70	
15.9	1.008160		6.509722		0.975923		6.495608		15.9
		53		−23		154		+69	
16.0	1.008107		6.553128		0.976077		6.539106		16.0
		52		−22		152		+68	
16.1	1.008055−		6.596535		0.976229		6.582603		16.1
		52		−22		150		+67	
16.2	1.008003		6.639942		0.976379		6.626099		16.2
		51		−21		148		+66	
16.3	1.007952		6.683350		0.976527		6.669594		16.3
		50		−21		146		+66	
16.4	1.007902		6.726758		0.976673		6.713089		16.4
		50		−21		144		+64	
16.5	1.007852		6.770166		0.976817		6.756582		16.5
		49		−21		143		+64	
16.6	1.007803		6.813574		0.976960		6.800075		16.6
		49		−20		141		+63	
16.7	1.007754		6.856983		0.977101		6.843567		16.7
		47		−21		139		+62	
16.8	1.007707		6.900391		0.977240		6.887058		16.8
		48		−20		137		+62	
16.9	1.007659		6.943800		0.977377		6.930549		16.9
		46		−19		136		+61	
17.0	1.007613		6.987210		0.977513		6.974039		17.0
		46		−20		134		+60	
17.1	1.007567		7.030619		0.977647		7.017528		17.1
		46		−19		133		+59	
17.2	1.007521		7.074029		0.977780		7.061016		17.2
		45		−19		131		+59	
17.3	1.007476		7.117439		0.977911		7.104504		17.3
		45		−19		129		+58	
17.4	1.007431		7.160849		0.978040		7.147991		17.4
		44		−18		128		+57	
17.5	1.007387		7.204260		0.978168		7.191477		17.5
		43		−18		126		+56	
17.6	1.007344		7.247671		0.978294		7.234962		17.6
		43		−18		125		+56	
17.7	1.007301		7.291082		0.978419		7.278447		17.7
		42		−18		124		+56	
17.8	1.007259		7.334493		0.978543		7.321932		17.8
		42		−18		122		+54	
17.9	1.007217		7.377904		0.978665+		7.365415		17.9
		42		−17		121		+54	
18.0	1.007175+		7.421316		0.978786		7.408898		18.0

18.0 . . 21.0

x	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi x}e^{-x}L_0(x)$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}L_0(x)$		$\frac{1}{2}\sqrt{\pi x}e^{-x}L_1(x)$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{\pi x}L_1(x)$		x
				43429				43429	
18.0	1.007175	41	7.421316	− 18	0.978786	119	7.408898	+ 54	18.0
18.1	1.007134	40	7.464727	− 17	0.978905	118	7.452381	+ 53	18.1
18.2	1.007094	40	7.508139	− 16	0.979023	117	7.495863	+ 52	18.2
18.3	1.007054	40	7.551552	− 17	0.979140	116	7.539344	+ 52	18.3
18.4	1.007014	39	7.594964	− 16	0.979256	114	7.582825	+ 51	18.4
18.5	1.006975	39	7.638377	− 17	0.979370	113	7.626305	+ 50	18.5
18.6	1.006936	38	7.681789	− 16	0.979483	111	7.669784	+ 50	18.6
18.7	1.006898	38	7.725202	− 16	0.979594	111	7.713263	+ 50	18.7
18.8	1.006860	38	7.768615	− 15	0.979705	109	7.756742	+ 49	18.8
18.9	1.006822	37	7.812029	− 16	0.979814	108	7.800220	+ 48	18.9
19.0	1.006785	36	7.855442	− 15	0.979922	107	7.843697	+ 48	19.0
19.1	1.006749	37	7.898856	− 16	0.980029	106	7.887174	+ 47	19.1
19.2	1.006712	35	7.942269	− 15	0.980135	105	7.930650	+ 47	19.2
19.3	1.006677	36	7.985683	− 14	0.980240	104	7.974126	+ 46	19.3
19.4	1.006641	35	8.029098	− 15	0.980344	102	8.017601	+ 46	19.4
19.5	1.006606	35	8.072512	− 15	0.980446	102	8.061076	+ 45	19.5
19.6	1.006571	34	8.115926	− 14	0.980548	100	8.104550	+ 45	19.6
19.7	1.006537	34	8.159341	− 14	0.980648	99	8.148024	+ 45	19.7
19.8	1.006503	34	8.202756	− 14	0.980747	99	8.191498	+ 44	19.8
19.9	1.006469	33	8.246171	− 14	0.980846	97	8.234971	+ 43	19.9
20.0	1.006436	33	8.289586	− 14	0.980943	97	8.278443	+ 43	20.0
20.1	1.006403	33	8.333001	− 14	0.981040	95	8.321915	+ 43	20.1
20.2	1.006370	32	8.376416	− 13	0.981135	94	8.365387	+ 43	20.2
20.3	1.006338	32	8.419832	− 14	0.981229	94	8.408859	+ 42	20.3
20.4	1.006306	32	8.463247	− 13	0.981323	93	8.452330	+ 41	20.4
20.5	1.006274	31	8.506663	− 13	0.981416	91	8.495800	+ 41	20.5
20.6	1.006243	31	8.550079	− 13	0.981507	91	8.539270	+ 40	20.6
20.7	1.006212	31	8.593495	− 13	0.981598	90	8.582739	+ 41	20.7
20.8	1.006181	30	8.636911	− 12	0.981688	89	8.626209	+ 40	20.8
20.9	1.006151	31	8.680328	− 13	0.981777	88	8.669678	+ 39	20.9
21.0	1.006120		8.723744		0.981865		8.713146		21.0

21.0 . . 24.0

x	$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} I_0 x$		$\log \sqrt{x} I_0 x$		$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} I_1 x$		$\log \sqrt{x} I_1 x$		x
				43429				43429	
21.0	1.006120		8.723744		0.981865		8.713146		21.0
		29		− 13		88		− 39	
21.1	1.006091		8.767160		0.981953		8.756614		21.1
		30		− 12		86		+ 39	
21.2	1.006061		8.810577		0.982039		8.800082		21.2
		29		− 12		86		+ 38	
21.3	1.006032		8.853994		0.982125		8.843549		21.3
		29		− 12		85		+ 38	
21.4	1.006003		8.897411		0.982210		8.887016		21.4
		29		− 12		84		+ 38	
21.5	1.005974		8.940828		0.982294		8.930483		21.5
		28		− 12		83		+ 37	
21.6	1.005946		8.984245		0.982377		8.973949		21.6
		29		− 11		82		+ 37	
21.7	1.005917		9.027663		0.982459		9.017415		21.7
		27		− 12		82		+ 36	
21.8	1.005890		9.071080		0.982541		9.060880		21.8
		28		− 12		81		+ 37	
21.9	1.005862		9.114497		0.982622		9.104346		21.9
		28		− 11		80		+ 36	
22.0	1.005834		9.157915		0.982702		9.147811		22.0
		27		− 11		80		+ 35	
22.1	1.005807		9.201333		0.982782		9.191275		22.1
		27		− 11		78		+ 35	
22.2	1.005780		9.244751		0.982860		9.234739		22.2
		26		− 11		78		+ 35	
22.3	1.005754		9.288169		0.982938		9.278203		22.3
		27		− 11		78		+ 35	
22.4	1.005727		9.331587		0.983016		9.321667		22.4
		26		− 11		76		+ 34	
22.5	1.005701		9.375005		0.983092		9.365130		22.5
		26		− 11		76		+ 34	
22.6	1.005675		9.418423		0.983168		9.408593		22.6
		25		− 11		75		+ 34	
22.7	1.005650		9.461841		0.983243		9.452056		22.7
		26		− 10		75		+ 33	
22.8	1.005624		9.505260		0.983318		9.495518		22.8
		25		− 10		74		+ 33	
22.9	1.005599		9.548679		0.983392		9.538980		22.9
		25		− 11		73		+ 33	
23.0	1.005574		9.592097		0.983465		9.582442		23.0
		25		− 10		73		+ 33	
23.1	1.005549		9.635516		0.983538		9.625904		23.1
		24		− 10		72		+ 32	
23.2	1.005525		9.678935		0.983610		9.669365		23.2
		25		− 10		71		+ 32	
23.3	1.005500		9.722354		0.983681		9.712826		23.3
		24		− 10		71		+ 31	
23.4	1.005476		9.765773		0.983752		9.756286		23.4
		24		− 10		70		+ 32	
23.5	1.005452		9.809192		0.983822		9.799747		23.5
		23		− 10		69		+ 31	
23.6	1.005429		9.852611		0.983891		9.843207		23.6
		24		− 10		69		+ 31	
23.7	1.005405		9.896030		0.983960		9.886667		23.7
		23		− 9		69		+ 30	
23.8	1.005382		9.939450		0.984029		9.930126		23.8
		23		− 10		68		+ 31	
23.9	1.005359		9.982869		0.984097		9.973586		23.9
		23		− 9		67		+ 30	
24.0	1.005336		10.026289		0.984164		10.017045		24.0

24.0 . . 27.0

x	$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} L_0 x$		$\log \frac{1}{2} x L_0(x)$		$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} L_1 x)$		$\log \frac{1}{2} x L_1(x)$		x
				43429				43429	
24.0	1.005336		10.026289	− 10	0.984164		10.017045	+ 30	24.0
		23				66			
24.1	1.005313		10.069708	− 9	0.984230		10.060504	+ 29	24.1
		22				66			
24.2	1.005291		10.113128	− 9	0.984296		10.103962	+ 30	24.2
		23				66			
24.3	1.005268		10.156548	− 9	0.984362		10.147421	+ 29	24.3
		22				65			
24.4	1.005246		10.199968	− 9	0.984427		10.190879	+ 29	24.4
		22				64			
24.5	1.005224		10.243388	− 9	0.984491		10.234337	+ 28	24.5
		21				64			
24.6	1.005203		10.286808	− 9	0.984555$_+$		10.277794	+ 29	24.6
		22				64			
24.7	1.005181		10.330228	− 9	0.984619		10.321252	+ 28	24.7
		21				63			
24.8	1.005160		10.373648	− 9	0.984682		10.364709	+ 28	24.8
		21				62			
24.9	1.005139		10.417068	− 8	0.984744		10.408166	+ 28	24.9
		21				62			
25.0	1.005118		10.460489	− 9	0.984806		10.451623	+ 27	25.0
		21				61			
25.1	1.005097		10.503909	− 8	0.984867		10.495079	+ 27	25.1
		21				61			
25.2	1.005076		10.547330	− 9	0.984928		10.538535	+ 27	25.2
		21				60			
25.3	1.005055$_+$		10.590750	− 8	0.984988		10.581991	+ 27	25.3
		20				60			
25.4	1.005035$_+$		10.634171	− 8	0.985048		10.625447	+ 27	25.4
		20				59			
25.5	1.005015$_-$		10.677592	− 8	0.985107		10.668903	+ 26	25.5
		20				59			
25.6	1.004995$_-$		10.721013	− 9	0.985166		10.712358	+ 27	25.6
		20				59			
25.7	1.004975$_-$		10.764433	− 8	0.985225$_-$		10.755814	+ 26	25.7
		20				58			
25.8	1.004955$_+$		10.807854	− 8	0.985283		10.799269	+ 25	25.8
		19				57			
25.9	1.004936		10.851275	− 8	0.985340		10.842723	+ 26	25.9
		20				57			
26.0	1.004916		10.894696	− 8	0.985397		10.886178	+ 25	26.0
		19				57			
26.1	1.004897		10.938117	− 7	0.985454		10.929632	+ 26	26.1
		19				56			
26.2	1.004878		10.981539	− 8	0.985510		10.973087	+ 25	26.2
		19				56			
26.3	1.004859		11.024960	− 8	0.985566		11.016541	+ 25	26.3
		19				55			
26.4	1.004840		11.068381	− 7	0.985621		11.059995	+ 24	26.4
		19				55			
26.5	1.004821		11.111803	− 8	0.985676		11.103448	+ 24	26.5
		18				55			
26.6	1.004803		11.155224	− 8	0.985731		11.146901	+ 25	26.6
		19				54			
26.7	1.004784		11.198645	− 7	0.985785$_0$		11.190355	+ 24	26.7
		18				54			
26.8	1.004766		11.242067	− 7	0.985839		11.233808	+ 24	26.8
		18				53			
26.9	1.004748		11.285489	− 8	0.985892		11.277261	+ 24	26.9
		18				53			
27.0	1.004730		11.328910		0.985945$_-$		11.320714		27.0

27.0 . . 30.0

x	$\frac{1}{2}\sqrt{x}e^{-x}L_0 x$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{x}L_0 x$		$\frac{1}{2}\sqrt{x}e^{-x}L_1 x$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{x}L_1 x$		x
				13429				43429	
27.0	1.004730		11.328910		0.985945		11.320714		27.0
		18		− 7		52		+ 23	
27.1	1.004712		11.372332		0.985997		11.364166		27.1
		18		− 7		52		+ 24	
27.2	1.004694		11.415754		0.986049		11.407619		27.2
		17		− 7		52		+ 23	
27.3	1.004677		11.459176		0.986101		11.451071		27.3
		17		− 7		52		+ 23	
27.4	1.004660		11.502598		0.986153		11.494523		27.4
		18		− 7		51		+ 23	
27.5	1.004642		11.546020		0.986204		11.537975		27.5
		17		− 7		50		+ 22	
27.6	1.004625$_0$		11.589442		0.986254		11.581426		27.6
		17		− 7		50		+ 23	
27.7	1.004608		11.632864		0.986304		11.624878		27.7
		17		− 7		50		+ 22	
27.8	1.004591		11.676286		0.986354		11.668329		27.8
		17		− 7		50		+ 23	
27.9	1.004574		11.719708		0.986404		11.711781		27.9
		16		− 7		49		+ 22	
28.0	1.004558		11.763130		0.986453		11.755232		28.0
		17		− 6		49		+ 22	
28.1	1.004541		11.806553		0.986502		11.798683		28.1
		17		− 7		48		+ 21	
28.2	1.004524		11.849975		0.986550		11.842133		28.2
		16		− 7		48		+ 22	
28.3	1.004508		11.893397		0.986598		11.885584		28.3
		16		− 6		48		+ 22	
28.4	1.004492		11.936820		0.986646		11.929035		28.4
		16		− 7		47		+ 21	
28.5	1.004476		11.980242		0.986693		11.972485		28.5
		16		− 6		47		+ 21	
28.6	1.004460		12.023665		0.986740		12.015935		28.6
		16		− 7		47		+ 21	
28.7	1.004444		12.067087		0.986787		12.059385		28.7
		16		− 6		46		+ 21	
28.8	1.004428		12.110510		0.986833		12.102835		28.8
		15		− 6		46		+ 21	
28.9	1.004413		12.153933		0.986879		12.146285		28.9
		16		− 7		46		+ 20	
29.0	1.004397		12.197355		0.986925$_+$		12.189734		29.0
		15		− 6		46		+ 21	
29.1	1.004382		12.240778		0.986971		12.233184		29.1
		16		− 6		45		+ 20	
29.2	1.004366		12.284201		0.987016		12.276633		29.2
		15		− 6		45		+ 20	
29.3	1.004351		12.327624		0.987061		12.320082		29.3
		15		− 6		44		+ 20	
29.4	1.004336		12.371047		0.987105$_+$		12.363531		29.4
		15		− 6		44		+ 20	
29.5	1.004321		12.414470		0.987149		12.406980		29.5
		15		− 6		44		+ 20	
29.6	1.004306		12.457893		0.987193		12.450429		29.6
		15		− 6		44		+ 19	
29.7	1.004291		12.501316		0.987237		12.493877		29.7
		14		− 6		43		+ 20	
29.8	1.004277		12.544739		0.987280		12.537326		29.8
		15		− 6		43		+ 19	
29.9	1.004262		12.588162		0.987323		12.580774		29.9
		14		− 6		43		+ 20	
30.0	1.004248		12.631585		0.987366		12.624223		30.0

30.0 . . 33.0

x	$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} I_0(x)$		$\log \frac{1}{2}\pi x I_0 x$		$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} I_1(x)$		$\log \frac{1}{2}\pi x I_1(x)$		x
				43429				43429	
30.0	1.004248	15	12.631585	− 5	0.987366	42	12.624223	+ 19	30.0
30.1	1.004233	14	12.675009	− 6	0.987408	42	12.667671	+ 19	30.1
30.2	1.004219	14	12.718432	− 6	0.987450	42	12.711119	+ 19	30.2
30.3	1.004205	14	12.761855	− 6	0.987492	42	12.754567	+ 18	30.3
30.4	1.004191	14	12.805278	− 5	0.987534	41	12.798014	+ 19	30.4
30.5	1.004177	14	12.848702	− 6	0.987575	41	12.841462	+ 18	30.5
30.6	1.004163	14	12.892125	− 5	0.987616	41	12.884909	+ 19	30.6
30.7	1.004149	14	12.935549	− 6	0.987657	41	12.928357	+ 18	30.7
30.8	1.004135	13	12.978972	− 5	0.987698	40	12.971804	+ 18	30.8
30.9	1.004122	14	13.022396	− 6	0.987738	40	13.015251	+ 18	30.9
31.0	1.004108	14	13.065819	− 5	0.987778	39	13.058698	+ 18	31.0
31.1	1.004094	13	13.109243	− 5	0.987817	40	13.102145	+ 18	31.1
31.2	1.004081	13	13.152667	− 6	0.987857	39	13.145592	+ 18	31.2
31.3	1.004068	13	13.196090	− 5	0.987896	39	13.189039	+ 17	31.3
31.4	1.004055	13	13.239514	− 5	0.987935	39	13.232485	+ 18	31.4
31.5	1.004042	13	13.282938	− 5	0.987974	38	13.275932	+ 17	31.5
31.6	1.004029	13	13.326362	− 5	0.988012	38	13.319378	+ 17	31.6
31.7	1.004016	13	13.369786	− 6	0.988050	38	13.362824	+ 17	31.7
31.8	1.004003	13	13.413209	− 5	0.988088	38	13.406270	+ 17	31.8
31.9	1.003990	13	13.456633	− 5	0.988126	38	13.449716	+ 17	31.9
32.0	1.003977	12	13.500057	− 5	0.988164	37	13.493162	+ 17	32.0
32.1	1.003965	13	13.543481	− 5	0.988201	37	13.536608	+ 17	32.1
32.2	1.003952	12	13.586905	− 5	0.988238	37	13.580054	+ 16	32.2
32.3	1.003940	13	13.630329	− 4	0.988275	36	13.623499	+ 17	32.3
32.4	1.003927	12	13.673754	− 5	0.988311	37	13.666945	+ 16	32.4
32.5	1.003915	12	13.717178	− 5	0.988348	36	13.710390	+ 17	32.5
32.6	1.003903	12	13.760602	− 5	0.988384	36	13.753836	+ 16	32.6
32.7	1.003891	12	13.804026	− 5	0.988420	35	13.797281	+ 16	32.7
32.8	1.003879	12	13.847450	− 5	0.988455	36	13.840726	+ 16	32.8
32.9	1.003867	12	13.890874	− 4	0.988491	35	13.884171	+ 16	32.9
33.0	1.003855		13.934299		0.988526		13.927616		33.0

33.0 . . 36.0

x	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}e^{-x}I_0 x$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{x}I_0 x$		$\frac{1}{2}\pi x e^{-x}I_1 x$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{x}I_1 x$		x
				43429				43429	
33.0	1.003855	12	13.934299	− 5	0.988526	35	13.927616	+ 16	33.0
33.1	1.003843	12	13.977723	− 5	0.988561	35	13.971061	+ 15	33.1
33.2	1.003831	12	14.021147	− 4	0.988596	34	14.014505	+ 16	33.2
33.3	1.003819	11	14.064572	− 5	0.988630	34	14.057950	+ 16	33.3
33.4	1.003808	12	14.107996	− 4	0.988664	35	14.101395	+ 15	33.4
33.5	1.003796	12	14.151421	− 5	0.988699	34	14.144839	+ 15	33.5
33.6	1.003784	11	14.194845	− 4	0.988733	33	14.188283	+ 16	33.6
33.7	1.003773	11	14.238270	− 5	0.988766	34	14.231728	+ 15	33.7
33.8	1.003762	12	14.281694	− 4	0.988800	33	14.275172	+ 15	33.8
33.9	1.003750	11	14.325119	− 5	0.988833	33	14.318616	+ 15	33.9
34.0	1.003739	11	14.368543	− 4	0.988866	33	14.362060	+ 15	34.0
34.1	1.003728	11	14.411968	− 4	0.988899	33	14.405504	+ 15	34.1
34.2	1.003717	11	14.455393	− 5	0.988932	33	14.448948	+ 15	34.2
34.3	1.003706	11	14.498817	− 4	0.988965	32	14.492392	+ 14	34.3
34.4	1.003695$_0$	11	14.542242	− 4	0.988997	32	14.535835	+ 15	34.4
34.5	1.003684	11	14.585667	− 5	0.989029	32	14.579279	+ 14	34.5
34.6	1.003673	10	14.629091	− 4	0.989061	32	14.622722	+ 15	34.6
34.7	1.003663	11	14.672516	− 4	0.989093	32	14.666166	+ 14	34.7
34.8	1.003652	11	14.715941	− 4	0.989125	31	14.709609	+ 14	34.8
34.9	1.003641	10	14.759366	− 4	0.989156	32	14.753052	+ 14	34.9
35.0	1.003631	11	14.802791	− 4	0.989188	31	14.796495	+ 15	35.0
35.1	1.003620	10	14.846216	− 4	0.989219	31	14.839939	+ 14	35.1
35.2	1.003610	11	14.889641	− 4	0.989250	30	14.883382	+ 14	35.2
35.3	1.003599	10	14.933066	− 4	0.989280	31	14.926825	+ 13	35.3
35.4	1.003589	10	14.976491	− 4	0.989311	30	14.970267	+ 14	35.4
35.5	1.003579	11	15.019916	− 4	0.989341	30	15.013710	+ 14	35.5
35.6	1.003568	10	15.063341	− 4	0.989371	30	15.057153	+ 11	35.6
35.7	1.003558	10	15.106766	− 4	0.989401	30	15.100596	+ 13	35.7
35.8	1.003548	10	15.150191	− 4	0.989431	30	15.144038	+ 14	35.8
35.9	1.003538	10	15.193616	− 4	0.989461	30	15.187481	+ 13	35.9
36.0	1.003528		15.237041		0.989491		15.230923		36.0

36.0 . . 39.0

x	$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_0(x)$		$\log \sqrt{x} L_0(x)$		$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_1(x)$		$\log \sqrt{x} L_1(x)$		x
				43429				43429	
36.0	1.003528	10	15.237041	− 4	0.989491	29	15.230923	+ 13	36.0
36.1	1.003518	10	15.280466	− 4	0.989520	29	15.274365	+ 14	36.1
36.2	1.003508	10	15.323891	− 4	0.989549	29	15.317808	+ 13	36.2
36.3	1.003498	9	15.367316	− 3	0.989578	29	15.361250	+ 13	36.3
36.4	1.003489	10	15.410742	− 4	0.989607	29	15.404692	+ 13	36.4
36.5	1.003479	10	15.454167	− 4	0.989636	28	15.448134	+ 13	36.5
36.6	1.003469	9	15.497592	− 4	0.989664	29	15.491576	+ 13	36.6
36.7	1.003460	10	15.541017	− 3	0.989693	28	15.535018	+ 13	36.7
36.8	1.003450	9	15.584443	− 4	0.989721	28	15.578460	+ 12	36.8
36.9	1.003441	10	15.627868	− 3	0.989749	28	15.621901	+ 13	36.9
37.0	1.003431	9	15.671294	− 4	0.989777	28	15.665343	+ 13	37.0
37.1	1.003422	9	15.714719	− 4	0.989805_0	28	15.708785	+ 13	37.1
37.2	1.003413	10	15.758144	− 3	0.989833	27	15.752227	+ 12	37.2
37.3	1.003403	9	15.801570	− 4	0.989860	28	15.795668	+ 13	37.3
37.4	1.003394	9	15.844995	− 3	0.989888	27	15.839110	+ 12	37.4
37.5	1.003385_5	9	15.888421	− 4	0.989915_5	27	15.882551	+ 13	37.5
37.6	1.003376	9	15.931846	− 3	0.989942	27	15.925993	+ 12	37.6
37.7	1.003367	9	15.975272	− 4	0.989969	26	15.969434	+ 12	37.7
37.8	1.003358	9	16.018697	− 3	0.989995_+	27	16.012875	+ 12	37.8
37.9	1.003349	9	16.062123	− 4	0.990022	26	16.056316	+ 12	37.9
38.0	1.003340	9	16.105548	− 3	0.990048	27	16.099757	+ 12	38.0
38.1	1.003331	9	16.148974	− 4	0.990075_5	26	16.143198	+ 12	38.1
38.2	1.003322	9	16.192399	− 3	0.990101	26	16.186639	+ 12	38.2
38.3	1.003313	9	16.235825	− 3	0.990127	26	16.230080	+ 11	38.3
38.4	1.003304	8	16.279251	− 4	0.990153	26	16.273520	+ 12	38.4
38.5	1.003296	9	16.322676	− 3	0.990179	25	16.316961	+ 12	38.5
38.6	1.003287	9	16.366102	− 3	0.990204	26	16.360402	+ 12	38.6
38.7	1.003278	8	16.409528	− 3	0.990230	25	16.403843	+ 11	38.7
38.8	1.003270	9	16.452954	− 4	0.990255_+	26	16.447283	+ 12	38.8
38.9	1.003261	9	16.496379	− 3	0.990281	25	16.490724	+ 11	38.9
39.0	1.003252		16.539805		0.990306		16.534164		39.0

39.0 . . 42.0

x	$\frac{1}{2}\sqrt{\pi x}\, e^{-x} I_0 x$		$\log \frac{1}{2} e^{x} I_0 x$		$\frac{1}{2}\sqrt{\pi x}\, e^{-x} I_1 x$		$\log \frac{1}{2} e^{x} I_1 x$		x
				13129				43129	
39.0	1.003252		16.539805	− 3	0.990306		16.534164	+ 11	39.0
		8				25			
39.1	1.003244		16.583231	− 3	0.990331		16.577604	+ 12	39.1
		8				25			
39.2	1.003236		16.626657	− 3	0.990356		16.621045	+ 11	39.2
		9				24			
39.3	1.003227		16.670083	− 4	0.990380		16.664485	+ 11	39.3
		8				25			
39.4	1.003219		16.713508	− 3	0.990405		16.707925	+ 12	39.4
		8				24			
39.5	1.003211		16.756934	− 3	0.990429		16.751366	+ 11	39.5
		8				25			
39.6	1.003203		16.800360	− 3	0.990454		16.794806	+ 11	39.6
		9				24			
39.7	1.003194		16.843786	− 3	0.990478		16.838246	+ 11	39.7
		8				24			
39.8	1.003186		16.887212	− 3	0.990502		16.881686	+ 11	39.8
		8				24			
39.9	1.003178		16.930638	− 3	0.990526		16.925126	+ 11	39.9
		8				24			
40.0	1.003170		16.974064	− 3	0.990550		16.968566	+ 11	40.0
		8				24			
40.1	1.003162		17.017490	− 3	0.990574		17.012006	+ 10	40.1
		8				23			
40.2	1.003154		17.060916	− 3	0.990597		17.055445	+ 11	40.2
		8				24			
40.3	1.003146		17.104342	− 3	0.990621		17.098885	+ 11	40.3
		8				23			
40.4	1.003138		17.147768	− 3	0.990644		17.142325	+ 10	40.4
		8				24			
40.5	1.003130		17.191194	− 3	0.990668		17.185764	+ 11	40.5
		7				23			
40.6	1.003123		17.234620	− 3	0.990691		17.229204	+ 11	40.6
		8				23			
40.7	1.003115		17.278046	− 3	0.990714		17.272644	+ 10	40.7
		8				23			
40.8	1.003107		17.321472	− 3	0.990737		17.316083	+ 11	40.8
		8				23			
40.9	1.003099		17.364898	− 3	0.990760		17.359523	+ 10	40.9
		7				22			
41.0	1.003092		17.408324	− 2	0.990782		17.402962	+ 10	41.0
		8				23			
41.1	1.003084		17.451751	− 3	0.990805		17.446401	+ 11	41.1
		8				22			
41.2	1.003076		17.495177	− 3	0.990827		17.489841	+ 10	41.2
		7				23			
41.3	1.003069		17.538603	− 3	0.990850		17.533280	+ 10	41.3
		8				22			
41.4	1.003061		17.582029	− 3	0.990872		17.576719	+ 10	41.4
		7				22			
41.5	1.003054		17.625455	− 3	0.990894		17.620158	+ 11	41.5
		8				22			
41.6	1.003046		17.668881	− 2	0.990916		17.663598	+ 10	41.6
		7				22			
41.7	1.003039		17.712308	− 3	0.990938		17.707037	+ 10	41.7
		7				22			
41.8	1.003032		17.755734	− 3	0.990960		17.750476	+ 10	41.8
		8				22			
41.9	1.003024		17.799160	− 2	0.990982		17.793915	− 9	41.9
		7				22			
42.0	1.003017		17.842587		0.991004		17.837353		42.0

42.0 . . 45.0

x	$\frac{1}{2}\pi x e^{-x}(L_0 x$		$\log \frac{1}{2}\pi x L_0 x$		$\frac{1}{2}\pi x e^{-x}(L_1 x)$		$\log \frac{1}{2}\pi x L_1 x$		x
				43429				43429	
42.0	1.003017	7	17.842587	− 3	0.991004	21	17.837353	+ 10	42.0
42.1	1.003010	7	17.886013	− 3	0.991025	21	17.880792	+ 10	42.1
42.2	1.003003	8	17.929439	− 3	0.991046	22	17.924231	+ 10	42.2
42.3	1.002995	7	17.972865	− 2	0.991068	21	17.967670	+ 10	42.3
42.4	1.002988	7	18.016292	− 3	0.991089	21	18.011109	+ 9	42.4
42.5	1.002981	7	18.059718	− 2	0.991110	21	18.054547	+ 10	42.5
42.6	1.002974	7	18.103145	− 3	0.991131	21	18.097986	+ 10	42.6
42.7	1.002967	7	18.146571	− 3	0.991152	21	18.141425	+ 10	42.7
42.8	1.002960	7	18.189997	− 2	0.991173	21	18.184864	+ 9	42.8
42.9	1.002953	7	18.233424	− 3	0.991194	20	18.228302	+ 9	42.9
43.0	1.002946	7	18.276850	− 2	0.991214	21	18.271740	+ 10	43.0
43.1	1.002939	7	18.320277	− 3	0.991235	20	18.315179	+ 9	43.1
43.2	1.002932	7	18.363703	− 2	0.991255	21	18.358617	+ 10	43.2
43.3	1.002925	7	18.407130	− 3	0.991276	20	18.402056	+ 9	43.3
43.4	1.002918	6	18.450556	− 2	0.991296	20	18.445494	+ 9	43.4
43.5	1.002912	7	18.493983	− 3	0.991316	20	18.488932	+ 9	43.5
43.6	1.002905	7	18.537409	− 2	0.991336	20	18.532370	+ 10	43.6
43.7	1.002898	6	18.580836	− 3	0.991356	20	18.575809	+ 9	43.7
43.8	1.002892	7	18.624262	− 2	0.991376	20	18.619247	+ 9	43.8
43.9	1.002885	7	18.667689	− 3	0.991396	20	18.662685	+ 9	43.9
44.0	1.002878	6	18.711115	− 2	0.991416	19	18.706123	+ 9	44.0
44.1	1.002872	7	18.754542	− 2	0.991435	20	18.749561	+ 9	44.1
44.2	1.002865	7	18.797969	− 3	0.991455	19	18.792999	+ 9	44.2
44.3	1.002858	6	18.841395	− 2	0.991474	19	18.836437	+ 9	44.3
44.4	1.002852	7	18.884822	− 3	0.991493	20	18.879875	+ 9	44.4
44.5	1.002845	6	18.928248	− 2	0.991513	19	18.923313	+ 9	44.5
44.6	1.002839	7	18.971675	− 2	0.991532	19	18.966751	+ 8	44.6
44.7	1.002832	6	19.015102	− 3	0.991551	19	19.010188	+ 9	44.7
44.8	1.002826	6	19.058528	− 2	0.991570	19	19.053626	+ 9	44.8
44.9	1.002820	7	19.101955	− 2	0.991589	19	19.097064	+ 9	44.9
45.0	1.002813		19.145382		0.991608		19.140502		45.0

45.0 . . 48.0

x	$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} I_0 x$		$\log \frac{1}{2} x I_0 x$		$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} I_1 x$		$\log \frac{1}{2} x I_1 x$		x
			43429				43429		
45.0	1.002813	6	19.145382	− 3	0.991608	18	19.140502	+ 8	45.0
45.1	1.002807	6	19.188808	− 2	0.991626	19	19.183939	+ 9	45.1
45.2	1.002801	7	19.232235	− 2	0.991645$_+$	19	19.227377	+ 8	45.2
45.3	1.002794	6	19.275662	− 2	0.991664	18	19.270814	+ 9	45.3
45.4	1.002788	6	19.319089	− 3	0.991682	18	19.314252	+ 8	45.4
45.5	1.002782	6	19.362515	− 2	0.991700	19	19.357689	+ 9	45.5
45.6	1.002776	6	19.405942	− 2	0.991719	18	19.401127	+ 8	45.6
45.7	1.002770	6	19.449369	− 2	0.991737	18	19.444564	+ 9	45.7
45.8	1.002764	6	19.492796	− 2	0.991755$_+$	18	19.488002	+ 8	45.8
45.9	1.002758	7	19.536223	− 3	0.991773	18	19.531439	+ 8	45.9
46.0	1.002751	6	19.579649	− 2	0.991791	18	19.574876	+ 9	46.0
46.1	1.002745$_+$	6	19.623076	− 2	0.991809	18	19.618314	+ 8	46.1
46.2	1.002739	6	19.666503	− 2	0.991827	18	19.661751	+ 8	46.2
46.3	1.002733	6	19.709930	− 2	0.991845$_0$	18	19.705188	+ 8	46.3
46.4	1.002727	6	19.753357	− 2	0.991863	17	19.748625	+ 9	46.4
46.5	1.002721	5	19.796784	− 2	0.991880	18	19.792063	+ 8	46.5
46.6	1.002716	6	19.840211	− 2	0.991898	17	19.835500	+ 8	46.6
46.7	1.002710	6	19.883638	− 3	0.991915$_+$	18	19.878937	+ 8	46.7
46.8	1.002704	6	19.927064	− 2	0.991933	17	19.922374	+ 8	46.8
46.9	1.002698	6	19.970491	− 2	0.991950	17	19.965811	+ 8	46.9
47.0	1.002692	6	20.013918	− 2	0.991967	17	20.009248	+ 8	47.0
47.1	1.002686	5	20.057345	− 2	0.991984	17	20.052685	+ 8	47.1
47.2	1.002681	6	20.100772	− 2	0.992001	17	20.096122	+ 8	47.2
47.3	1.002675$_-$	6	20.144199	− 2	0.992018	17	20.139559	+ 8	47.3
47.4	1.002669	6	20.187626	− 2	0.992035$_+$	17	20.182996	+ 7	47.4
47.5	1.002663	5	20.231053	− 2	0.992052	17	20.226432	+ 8	47.5
47.6	1.002658	6	20.274480	− 2	0.992069	17	20.269869	+ 8	47.6
47.7	1.002652	5	20.317907	− 2	0.992086	17	20.313306	+ 8	47.7
47.8	1.002647	6	20.361334	− 2	0.992103	16	20.356743	+ 7	47.8
47.9	1.002641	6	20.404761	− 2	0.992119	17	20.400179	+ 8	47.9
48.0	1.002635$_+$		20.448188		0.992136		20.443616		48.0

48.0 . . 50.0

x	$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} I_0(x)$	$\log \frac{1}{2}\pi x I_0 x$	$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} I_1(x)$	$\log \frac{1}{2}\pi x I_1(x)$	x
		43429		43429	
48.0	1.002635$_{+}$	20.448188	0.992136	20.443616	48.0
	5	-2	16	$+8$	
48.1	1.002630	20.491615	0.992152	20.487053	48.1
	6	-2	17	$+8$	
48.2	1.002624	20.535042	0.992169	20.530490	48.2
	5	-2	16	$+7$	
48.3	1.002619	20.578469	0.992185$_{-}$	20.573926	48.3
	6	-2	16	$+8$	
48.4	1.002613	20.621896	0.992201	20.617363	48.4
	5	-2	16	$+7$	
48.5	1.002608	20.665323	0.992217	20.660799	48.5
	6	-1	16	$+8$	
48.6	1.002602	20.708751	0.992233	20.704236	48.6
	5	-2	16	$+7$	
48.7	1.002597	20.752178	0.992249	20.747672	48.7
	5	-2	16	$+8$	
48.8	1.002592	20.795605	0.992265$_{+}$	20.791109	48.8
	6	-2	16	$+7$	
48.9	1.002586	20.839032	0.992281	20.834545	48.9
	5	-2	16	$+7$	
49.0	1.002581	20.882459	0.992297	20.877981	49.0
	5	-2	16	$+8$	
49.1	1.002576	20.925886	0.992313	20.921418	49.1
	6	-2	16	$+7$	
49.2	1.002570	20.969313	0.992329	20.964854	49.2
	5	-2	15	$+7$	
49.3	1.002565$_{0}$	21.012740	0.992344	21.008290	49.3
	5	-1	16	$+8$	
49.4	1.002560	21.056168	0.992360	21.051727	49.4
	5	-2	16	$+7$	
49.5	1.002555$_{-}$	21.099595	0.992376	21.095163	49.5
	6	-2	15	$+7$	
49.6	1.002549	21.143022	0.992391	21.138599	49.6
	5	-2	15	$+7$	
49.7	1.002544	21.186449	0.992406	21.182035	49.7
	5	-2	16	$+7$	
49.8	1.002539	21.229876	0.992422	21.225471	49.8
	5	-1	15	$+8$	
49.9	1.002534	21.273304	0.992437	21.268908	49.9
	5	-2	15	$+7$	
50.0	1.002529	21.316731	0.992452	21.312344	50.0

Für den konstanten Teil der Differenzen:

1	43429.4
2	86858.8
3	130288.2
4	173717.6
5	217147.0
6	260576.4
7	304005.8
8	347435.2
9	390864.6

x	$\| 2\pi x e^{-x} L_0(x)$		$\log \| x L_0(x)$		$\| 2\pi x e^{-x} L_1(x)$		$\log \| x L_1 x$		x
				434294				434294	
50	1.002529	50	21.316731	− 21	0.992452	149	21.312344	+ 65	50
51	1.002479	49	21.751004	− 21	0.992601	143 6	21.746703	+ 63	51
52	1.002430	46	22.185277	− 19	0.992744	138 5	22.181060	+ 61	52
53	1.002384	45	22.619552	- 19	0.992882	133 5	22.615415	+ 59	53
54	1.002339	43	23.053827	− 18	0.993015	128 5	23.049768	+ 56	54
55	1.002296	41	23.488103	− 18	0.993143	123 5	23.484118	+ 54	55
56	1.002255	40	23.922379	− 17	0.993266	118 5	23.918466	+ 53	56
57	1.002215	39	24.356656	− 16	0.993384	115 3	24.352813	+ 50	57
58	1.002176	37	24.790934	− 15	0.993499	111 4	24.787157	+ 49	58
59	1.002139	36	25.225213	− 16	0.993610	107	25.221500	+ 48	59
60	1.002103	35	25.659491	− 14	0.993717	103	25.655842	+ 45	60
61	1.002068	33	26.093771	− 14	0.993820	101	26.090181	+ 44	61
62	1.002035	33	26.528051	− 14	0.993921	97	26.524519	+ 43	62
63	1.002002	31	26.962331	− 13	0.994018	94	26.958856	+ 42	63
64	1.001971	31	27.396612	− 13	0.994112	91	27.393192	+ 40	64
65	1.001940	30	27.830893	− 12	0.994203	88	27.827526	+ 39	65
66	1.001910	28	28.265175	− 12	0.994291	86	28.261859	+ 38	66
67	1.001882	28	28.699457	− 12	0.994377	83	28.696191	+ 37	67
68	1.001854	27	29.133739	− 11	0.994460	80	29.130522	+ 36	68
69	1.001827	27	29.568022	− 11	0.994540	79	29.564852	+ 34	69
70	1.001800		30.002305		0.994619		29.999180		70

70 . . 100

x	$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} L_0 x$		$\log \frac{1}{2}\pi x L_0 x$		$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} L_1 x$		$\log \frac{1}{2}\pi x L_1 x$		x
				434294				434291	
70	1.001800		30.002305	— 11	0.994619		29.999180	+ 34	70
		25				76			
71	1.001775		30.436588	— 10	0.994695		30.433508	+ 33	71
		25				74			
72	1.001750		30.870872	— 10	0.994769		30.867835	+ 32	72
		24				72			
73	1.001726		31.305156	— 10	0.994841		31.302161	+ 31	73
		24				70			
74	1.001702		31.739440	— 9	0.994911		31.736486	+ 30	74
		23				68			
75	1.001679		32.173725	— 9	0.994979		32.170810	+ 29	75
		22				66			
76	1.001657		32.608010	— 9	0.995045		32.605133	+ 29	76
		22				65			
77	1.001635		33.042295	— 9	0.995110		33.039456	+ 28	77
		21				63			
78	1.001614		33.476580	— 8	0.995173		33.473778	+ 27	78
		20				61			
79	1.001594		33.910866	— 9	0.995234		33.908099	+ 27	79
		20				60			
80	1.001574		34.345151	— 8	0.995294		34.342420	+ 26	80
		20				58			
81	1.001554		34.779437	— 7	0.995352		34.776740	+ 25	81
		19				57			
82	1.001535		35.213724	— 8	0.995409		35.211059	+ 25	82
		19				56			
83	1.001516		35.648010	— 7	0.995465		35.645378	+ 24	83
		18				54			
84	1.001498		36.082297	— 8	0.995519		36.079696	+ 24	84
		18				53			
85	1.001480		36.516583	— 7	0.995572		36.514014	+ 23	85
		17				52			
86	1.001463		36.950870	— 6	0.995624		36.948331	+ 22	86
		17				50			
87	1.001446		37.385158	— 7	0.995674		37.382647	+ 22	87
		16				49			
88	1.001430		37.819445	— 7	0.995723		37.816963	+ 22	88
		16				49			
89	1.001414		38.253732	— 6	0.995772		38.251279	+ 21	89
		16				47			
90	1.001398		38.688020	— 6	0.995819		38.685594	+ 20	90
		16				46			
91	1.001382		39.122308	— 6	0.995865		39.119908	+ 20	91
		15				45			
92	1.001367		39.556596	— 6	0.995910		39.554222	+ 20	92
		15				44			
93	1.001352		39.990884	— 6	0.995954		39.988536	+ 19	93
		14				43			
94	1.001338		40.425172	— 6	0.995997		40.422849	+ 19	94
		14				42			
95	1.001324		40.859460	— 5	0.996039		40.857162	+ 19	95
		14				42			
96	1.001310		41.293749	— 6	0.996081		41.291475	+ 18	96
		14				40			
97	1.001296		41.728037	— 5	0.996121		41.725787	+ 18	97
		13				40			
98	1.001283		42.162326	— 5	0.996161		42.160099	+ 17	98
		13				39			
99	1.001270		42.596615	— 5	0.996200		42.594410	+ 17	99
		13				38			
100	1.001257		43.030904		0.996238		43.028721		100

100 . . 130

x	$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_0(x)$		$\log \sqrt{x}L_0(x)$		$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1(x)$		$\log \sqrt{x}L_1(x)$		x
			434294				434294		
100	1.001257	12	43.030904	− 5	0.996238	37	43.028721	+ 17	100
101	1.001245	13	43.465193	− 5	0.996275	37	43.463032	+ 17	101
102	1.001232	12	43.899482	− 5	0.996312	36	43.897343	+ 16	102
103	1.001220	12	44.333771	− 1	0.996348	35	44.331653	+ 16	103
104	1.001208	11	44.768061	− 5	0.996383	35	44.765963	+ 15	104
105	1.001197	12	45.202350	− 4	0.996418	34	45.200272	+ 15	105
106	1.001185	11	45.636640	− 5	0.996452	33	45.634581	+ 15	106
107	1.001174	10	46.070929	− 4	0.996485	33	46.068890	+ 15	107
108	1.001164	11	46.505219	− 4	0.996518	32	46.503199	+ 15	108
109	1.001153	11	46.939509	− 4	0.996550	31	46.937508	+ 14	109
110	1.001142	10	47.373799	− 4	0.996581	31	47.371816	+ 14	110
111	1.001132	10	47.808089	− 4	0.996612	30	47.806124	+ 13	111
112	1.001122	10	48.242379	− 4	0.996642	30	48.240431	+ 14	112
113	1.001112	10	48.676669	− 4	0.996672	29	48.674739	+ 13	113
114	1.001102	10	49.110959	− 3	0.996701	29	49.109046	+ 13	114
115	1.001092	9	49.545250	− 4	0.996730	28	49.543353	+ 13	115
116	1.001083	10	49.979540	− 4	0.996758	28	49.977660	+ 12	116
117	1.001073	9	50.413830	− 3	0.996786	27	50.411966	+ 13	117
118	1.001064	9	50.848121	− 1	0.996813	27	50.846273	+ 12	118
119	1.001055	8	51.282411	− 3	0.996840	27	51.280579	+ 12	119
120	1.001047	9	51.716702	− 3	0.996867	26	51.714885	+ 12	120
121	1.001038	9	52.150993	− 4	0.996893	25	52.149191	+ 11	121
122	1.001029	8	52.585283	− 3	0.996918	25	52.583496	+ 12	122
123	1.001021	8	53.019574	− 3	0.996943	25	53.017802	+ 11	123
124	1.001013	8	53.453865	− 3	0.996968	24	53.452107	+ 11	124
125	1.001005	8	53.888156	− 3	0.996992	24	53.886412	+ 11	125
126	1.000997	8	54.322447	− 3	0.997016	24	54.320717	+ 11	126
127	1.000989	8	54.756738	− 3	0.997040	23	54.755022	+ 10	127
128	1.000981	8	55.191029	− 2	0.997063	23	55.189326	+ 11	128
129	1.000973	7	55.625321	− 3	0.997086	22	55.623631	+ 10	129
130	1.000966		56.059612		0.997108		56.057935		130

130 . . 160

x	$\| 2\pi x e^{-x} L_0 x$		$\log \| x L_0 x$		$\| 2\pi\sqrt{x} e^{-x} L_1(x$		$\log \| \sqrt{x} L_1(x)$		x
				434294				434294	
130	1.000966	8	56.059612	− 3	0.997108	23	56.057935	+ 10	130
131	1.000958	7	56.493903	− 3	0.997131	21	56.492239	+ 10	131
132	1.000951	7	56.928194	− 2	0.997152	22	56.926543	+ 10	132
133	1.000944	7	57.362486	− 3	0.997174	21	57.360847	+ 10	133
134	1.000937	7	57.796777	− 2	0.997195$_0$	21	57.795151	+ 9	134
135	1.000930	7	58.231069	− 3	0.997216	20	58.229454	+ 10	135
136	1.000923	7	58.665360	− 2	0.997236	21	58.663758	+ 9	136
137	1.000916	6	59.099652	− 3	0.997257	19	59.098061	+ 9	137
138	1.000910	7	59.533943	− 2	0.997276	20	59.532364	+ 9	138
139	1.000903	6	59.968235	− 2	0.997296	19	59.966667	+ 9	139
140	1.000897	7	60.402527	− 3	0.997315$_+$	19	60.400970	+ 9	140
141	1.000890	6	60.836818	− 2	0.997334	19	60.835273	+ 9	141
142	1.000884	6	61.271110	− 2	0.997353	19	61.269576	+ 8	142
143	1.000878	7	61.705402	− 2	0.997372	18	61.703878	+ 8	143
144	1.000871	6	62.139694	− 2	0.997390	18	62.138180	+ 9	144
145	1.000865$_+$	6	62.573986	− 3	0.997408	18	62.572483	+ 8	145
146	1.000859	5	63.008277	− 2	0.997426	18	63.006785	+ 8	146
147	1.000854	6	63.442569	− 2	0.997444	17	63.441087	+ 8	147
148	1.000848	6	63.876861	− 2	0.997461	17	63.875389	+ 8	148
149	1.000842	6	64.311153	− 2	0.997478	17	64.309691	+ 8	149
150	1.000836	5	64.745445	− 2	0.997495$_-$	17	64.743993	+ 8	150
151	1.000831	6	65.179737	− 1	0.997512	16	65.178295	+ 7	151
152	1.000825$_+$	5	65.614030	− 2	0.997528	16	65.612596	+ 8	152
153	1.000820	5	66.048322	− 2	0.997544	16	66.046898	+ 7	153
154	1.000815$_-$	6	66.482614	− 2	0.997560	16	66.481199	+ 8	154
155	1.000809	5	66.916906	− 2	0.997576	15	66.915501	+ 7	155
156	1.000804	5	67.351198	− 1	0.997591	16	67.349802	+ 7	156
157	1.000799	5	67.785491	− 2	0.997607	15	67.784103	+ 7	157
158	1.000794	5	68.219783	− 2	0.997622	15	68.218404	+ 7	158
159	1.000789	5	68.654075	− 1	0.997637	15	68.652705	+ 7	159
160	1.000784		69.088368		0.997652		69.087006		160

160 . . 190

x	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} I_0(x)$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} I_0(x)$		$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} I_1(x)$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} I_1(x)$		x
			434291				434294		
160	1.000784	5	69.088368	− 2	0.997652	14	69.087006	+ 7	160
161	1.000779	5	69.522660	− 2	0.997666	15	69.521307	+ 7	161
162	1.000774	4	69.956952	− 1	0.997681	14	69.955608	+ 6	162
163	1.000770	5	70.391245	− 2	0.997695$_0$	14	70.389908	+ 7	163
164	1.000765$_5$	5	70.825537	− 1	0.997709	14	70.824209	+ 7	164
165	1.000760	4	71.259830	− 2	0.997723	14	71.258510	+ 6	165
166	1.000756	5	71.694122	− 2	0.997737	13	71.692810	+ 6	166
167	1.000751	5	72.128414	− 1	0.997750	14	72.127110	+ 7	167
168	1.000747	4	72.562707	− 1	0.997764	13	72.561411	+ 6	168
169	1.000742	4	72.997000	− 2	0.997777	13	72.995711	+ 6	169
170	1.000738	5	73.431292	− 1	0.997790	13	73.430011	+ 6	170
171	1.000733	4	73.865585	− 2	0.997803	13	73.864311	+ 6	171
172	1.000729	4	74.299877	− 1	0.997816	12	74.298611	+ 6	172
173	1.000725$_5$	4	74.734170	− 1	0.997828	13	74.732911	+ 6	173
174	1.000721	4	75.168463	− 2	0.997841	12	75.167211	+ 6	174
175	1.000717	5	75.602755	− 1	0.997853	13	75.601511	+ 6	175
176	1.000712	4	76.037048	− 1	0.997866	12	76.035811	+ 6	176
177	1.000708	4	76.471341	− 1	0.997878	12	76.470111	+ 5	177
178	1.000704	4	76.905634	− 2	0.997890	11	76.904410	+ 6	178
179	1.000700	3	77.339926	− 1	0.997901	12	77.338710	+ 6	179
180	1.000697	4	77.774219	− 1	0.997913	12	77.773010	+ 5	180
181	1.000693	4	78.208512	− 1	0.997925$_5$	11	78.207309	+ 5	181
182	1.000689	4	78.642805	− 1	0.997936	11	78.641608	+ 6	182
183	1.000685$_+$	3	79.077098	− 1	0.997947	11	79.075908	+ 5	183
184	1.000682	4	79.511391	− 2	0.997958	12	79.510207	+ 5	184
185	1.000678	4	79.945683	− 1	0.997970	10	79.944506	+ 6	185
186	1.000674	4	80.379976	− 1	0.997980	11	80.378806	+ 5	186
187	1.000670	3	80.814269	− 1	0.997991	11	80.813105	+ 5	187
188	1.000667	4	81.248562	− 1	0.998002	11	81.247404	+ 5	188
189	1.000663	3	81.682855	− 1	0.998013	10	81.681703	+ 5	189
190	1.000660		82.117148		0.998023		82.116002		190

190 . . 200

x	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}\,e^{-x}L_0(x)$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{x}L_0(x)$		$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}\,e^{-x}L_1(x)$		$\log \frac{1}{2}\sqrt{x}L_1(x)$		x
			434294				434294		
190	1.000660	4	82.117148	− 1	0.998023	11	82.116002	+ 5	190
191	1.000656	3	82.551441	− 1	0.998034	10	82.550301	+ 5	191
192	1.000653	3	82.985734	− 1	0.998044	10	82.984600	+ 5	192
193	1.000650	4	83.420027	− 1	0.998054	10	83.418899	+ 5	193
194	1.000646	3	83.854320	− 1	0.998064	10	83.853198	+ 5	194
195	1.000643	3	84.288613	− 1	0.998074	10	84.287497	+ 4	195
196	1.000640	4	84.722906	− 1	0.998084	9	84.721795	+ 5	196
197	1.000636	3	85.157199	− 1	0.998093	10	85.156094	+ 5	197
198	1.000633	3	85.591492	− 1	0.998103	10	85.590393	+ 4	198
199	1.000630	3	86.025785	− 1	0.998113	9	86.024691	+ 5	199
200	1.000627		86.460078		0.998122		86.458990		200

Für den konstanten Teil der Differenzen:

1	434294.5
2	868589.0
3	1302883.5
4	1737178.0
5	2171472.5
6	2605767.0
7	3040061.5
8	3474356.0
9	3908650.5

x	$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_0 x$		$\log \sqrt{x} L_0 x$		$\sqrt{2\pi x}\, e^{-x} L_1 x$		$\log \sqrt{x} L_1 x$		x
			4.342945				1.312945		
200	1.000627		86.460078		0.998122		86.458990		200
		30		— 13		90		+ 39	
210	1.000597		90.803010		0.998212	9	90.801974		210
		27		— 12		81		+ 35	
220	1.000570		95.145943		0.998293	7	95.144954		220
		25		— 11		74		+ 32	
230	1.000545		99.488877		0.998367	6	99.487931		230
		23		— 10		68		+ 30	
240	1.000522		103.831812		0.998435	5	103.830906		240
		21		— 9		63		+ 27	
250	1.000501		108.174748		0.998498	5	108.173878		250
		19		— 9		58		+ 25	
260	1.000482		112.517684		0.998556	5	112.516848		260
		18		— 7		53		+ 23	
270	1.000464		116.860622		0.998609		116.859816		270
		17		— 8		50		+ 21	
280	1.000447		121.203559		0.998659		121.202782		280
		15		— 7		46		+ 20	
290	1.000432		125.546497		0.998705		125.545747		290
		14		— 6		44		+ 19	
300	1.000418		129.889436		0.998749		129.888711		300
		14		— 6		40		+ 17	
310	1.000404		134.232375		0.998789		134.231673		310
		13		— 6		38		+ 16	
320	1.000391		138.575314		0.998827		138.574634		320
		12		— 5		36		+ 16	
330	1.000379		142.918254		0.998863		142.917595		330
		11		— 5		33		+ 14	
340	1.000368		147.261194		0.998896		147.260554		340
		10		— 5		32		+ 14	
350	1.000358		151.604134		0.998928		151.603513		350
		10		— 5		29		+ 13	
360	1.000348		155.947074		0.998957		155.946471		360
		10		— 4		29		+ 12	
370	1.000338		160.290015		0.998986		160.289428		370
		9		— 4		26		+ 11	
380	1.000329		164.632956		0.999012		164.632384		380
		8		— 4		26		+ 11	
390	1.000321		168.975897		0.999038		168.975340		390
		8		— 3		24		+ 10	
400	1.000313		173.318839		0.999062		173.318295		400

400 . . 700

x	$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_0(x)$		$\log\sqrt{x}L_0(x$		$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1(x)$		$\log\sqrt{x}L_1(x$		x
			4.342945				4.342945		
400	1.000313		173.318839		0.999062		173.318295		400
		7		− 4		23		+ 10	
410	1.000305+		177.661780		0.999085−		177.661250		410
		7		− 3		21		+ 9	
420	1.000298		182.004722		0.999106		182.004204		420
		7		− 3		21		+ 9	
430	1.000291		186.347664		0.999127		186.347158		430
		7		− 3		20		+ 8	
440	1.000284		190.690606		0.999147		190.690111		440
		6		− 3		19		+ 8	
450	1.000278		195.033548		0.999166		195.033064		450
		6		− 3		18		+ 8	
460	1.000272		199.376490		0.999184		199.376017		460
		6		− 3		18		+ 8	
470	1.000266		203.719432		0.999202		203.718970		470
		5		− 2		16		+ 7	
480	1.000261		208.062375		0.999218		208.061922		480
		6		− 3		16		+ 6	
490	1.000255+		212.405317		0.999234		212.404873		490
		5		− 2		15		+ 7	
500	1.000250		216.748260		0.999249		216.747825		500
		5		− 3		15		+ 6	
510	1.000245+		221.091202		0.999264		221.090776		510
		4		− 2		14		+ 6	
520	1.000241		225.434145		0.999278		225.433727		520
		5		− 2		14		+ 6	
530	1.000236		229.777088		0.999292		229.776678		530
		4		− 2		13		+ 5	
540	1.000232		234.120031		0.999305+		234.119628		540
		4		− 2		13		+ 6	
550	1.000228		238.462974		0.999318		238.462579		550
		5		− 2		12		+ 5	
560	1.000223		242.805917		0.999330		242.805529		560
		3		− 2		12		+ 5	
570	1.000220		247.148860		0.999342		247.148479		570
		4		− 2		11		+ 5	
580	1.000216		251.491803		0.999353		251.491429		580
		4		− 1		11		+ 4	
590	1.000212		255.834747		0.999364		255.834378		590
		4		− 2		11		+ 5	
600	1.000208		260.177690		0.999375−		260.177328		600
		3		− 2		10		+ 4	
610	1.000205+		264.520633		0.999385−		264.520277		610
		3		− 2		10		+ 4	
620	1.000202		268.863576		0.999395−		268.863226		620
		3		− 1		9		+ 4	
630	1.000199		273.206520		0.999404		273.206175		630
		3		− 2		10		+ 4	
640	1.000196		277.549463		0.999414		277.549124		640
		3		− 1		9		+ 3	
650	1.000193		281.892407		0.999423		281.892072		650
		3		− 2		9		+ 4	
660	1.000190		286.235350		0.999432		286.235021		660
		3		− 1		8		+ 4	
670	1.000187		290.578294		0.999440		290.577970		670
		3		− 1		8		+ 3	
680	1.000184		294.921238		0.999448		294.920918		680
		3		− 2		8		+ 3	
690	1.000181		299.264181		0.999456		299.263866		690
		2		− 1		8		+ 1	
700	1.000179		303.607125		0.999464		303.606815		700

700 . . 1000

x	$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_0(x)$		$\log\sqrt{x}L_0(x)$		$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1(x)$		$\log\sqrt{x}L_1(x)$		x
			4.342945				4.342945		
700	1.000179	3	303.607125	−1	0.999464	8	303.606815	+3	700
710	1.000176	2	307.950069	−2	0.999472	7	307.949763	+3	710
720	1.000174	3	312.293012	−1	0.999479	7	312.292711	+3	720
730	1.000171	2	316.635956	−1	0.999486	7	316.635659	+2	730
740	1.000169	2	320.978900	−1	0.999493	7	320.978606	+3	740
750	1.000167	2	325.321844	−1	0.999500	6	325.321554	+3	750
760	1.000165−	3	329.664788	−1	0.999506	7	329.664502	+2	760
770	1.000162	2	334.007732	−1	0.999513	6	334.007449	+3	770
780	1.000160	2	338.350676	−1	0.999519	6	338.350397	+2	780
790	1.000158	2	342.693620	−2	0.999525+	6	342.693344	+3	790
800	1.000156	2	347.036563	−1	0.999531	6	347.036292	+2	800
810	1.000154	2	351.379507	−1	0.999537	5	351.379239	+2	810
820	1.000152	1	355.722451	−1	0.999542	6	355.722186	+3	820
830	1.000151	2	360.065395	−1	0.999548	5	360.065134	+2	830
840	1.000149	2	364.408339	0	0.999553	6	364.408081	+2	840
850	1.000147	1	368.751284	−1	0.999559	5	368.751028	+2	850
860	1.000146	2	373.094228	−1	0.999564	5	373.093975	+2	860
870	1.000144	2	377.437172	−1	0.999569	5	377.436922	+2	870
880	1.000142	1	381.780116	−1	0.999574	4	381.779869	+2	880
890	1.000141	2	386.123060	−1	0.999578	5	386.122816	+2	890
900	1.000139	1	390.466004	−1	0.999583	5	390.465763	+2	900
910	1.000138	2	394.808948	−1	0.999588	4	394.808710	+1	910
920	1.000136	1	399.151892	0	0.999592	5	399.151656	+2	920
930	1.000135−	2	403.494837	−1	0.999597	4	403.494603	+2	930
940	1.000133	1	407.837781	−1	0.999601	4	407.837550	+1	940
950	1.000132	2	412.180725	−1	0.999605+	4	412.180496	+2	950
960	1.000130	1	416.523669	−1	0.999609	1	416.523443	+2	960
970	1.000129	1	420.866613	0	0.999613	4	420.866390	+1	970
980	1.000128	2	425.209558	−1	0.999617	4	425.209336	+1	980
990	1.000126	1	429.552502	−1	0.999621	1	429.552282	+2	990
1000	1.000125+		433.895446		0.999625−		433.895229		1000

Für den konstanten Teil der Differenzen:

1	4342944.8
2	8685889.6
3	13028834.4
4	17371779.2
5	21714724.0
6	26057668.8
7	30400613.6
8	34743558.4
9	39086503.2

x	$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} L_0 x$		$\log \frac{1}{2}\pi x L_0 x$		$\frac{1}{2}\pi x e^{-x} L_1 x$		$\log \frac{1}{2}\pi x L_1 x$		x
			43.429448				43.429448		
1000	1.000125	+ 11	433.895446	− 5	0.999625	− 34	433.895229	+ 15	1000
1100	1.000114	10	477.324889	− 4	0.999659	28	477.324692	+ 12	1100
1200	1.000104	8	520.754333	− 3	0.999687	24	520.754152	+ 11	1200
1300	1.000096	7	564.183778	− 3	0.999711	21	564.183611	+ 9	1300
1400	1.000089	6	607.613223	− 2	0.999732	18	607.613068	+ 8	1400
1500	1.000083	5	651.042669	− 2	0.999750	16	651.042524	+ 7	1500
1600	1.000078	4	694.472115	− 2	0.999766	13	694.471979	+ 6	1600
1700	1.000074	5	737.901561	− 1	0.999779	13	737.901433	+ 6	1700
1800	1.000069	3	781.331008	− 2	0.999792	11	781.330887	+ 5	1800
1900	1.000066	3	824.760454	− 1	0.999803	9	824.760340	+ 4	1900
2000	1.000063	3	868.189901	− 1	0.999812	9	868.189792	+ 4	2000
2100	1.000060	3	911.619348	− 1	0.999821	8	911.619244	+ 4	2100
2200	1.000057	3	955.048795	− 1	0.999829	8	955.048696	+ 4	2200
2300	1.000054	2	998.478242	− 1	0.999837	7	998.478148	+ 3	2300
2400	1.000052	2	1041.907689	− 1	0.999844	6	1041.907599	+ 3	2400
2500	1.000050	2	1085.337136	0	0.999850	6	1085.337050	+ 2	2500
2600	1.000048	2	1128.766584	− 1	0.999856	5	1128.766500	+ 3	2600
2700	1.000046	1	1172.196031	0	0.999861	5	1172.195951	+ 2	2700
2800	1.000045	2	1215.625479	− 1	0.999866	5	1215.625401	+ 2	2800
2900	1.000043	1	1259.054926	0	0.999871	4	1259.054851	+ 2	2900
3000	1.000042		1302.484374		0.999875		1302.484301		3000

3000 . . 5000

x	$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_0(x)$		$\log \sqrt{x}L_0(x)$		$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1(x)$		$\log \sqrt{x}L_1 x$		x
			43.429448				43.429448		
3000	1.000042	2	1302.484374	−1	0.999875$_0$	4	1302.484301	+2	3000
3100	1.000040	1	1345.913821	0	0.999879	4	1345.913751	+2	3100
3200	1.000039	1	1389.343269	0	0.999883	3	1389.343201	+2	3200
3300	1.000038	1	1432.772717	−1	0.999886	4	1432.772651	+2	3300
3400	1.000037	1	1476.202164	0	0.999890	3	1476.202101	+1	3400
3500	1.000036	1	1519.631612	0	0.999893	3	1519.631550	+2	3500
3600	1.000035$_0$	1	1563.061060	0	0.999896	3	1563.061000	+1	3600
3700	1.000034	1	1606.490508	0	0.999899	2	1606.490449	+1	3700
3800	1.000033	1	1649.919956	−1	0.999901	3	1649.919898	+2	3800
3900	1.000032	1	1693.349403	0	0.999904	2	1693.349348	+1	3900
4000	1.000031	1	1736.778851	0	0.999906	2	1736.778797	+1	4000
4100	1.000030	0	1780.208299	0	0.999908	3	1780.208246	+1	4100
4200	1.000030	1	1823.637747	0	0.999911	2	1823.637695	+1	4200
4300	1.000029	1	1867.067195	0	0.999913	2	1867.067144	+1	4300
4400	1.000028	0	1910.496643	0	0.999915$_0$	2	1910.496593	+1	4400
4500	1.000028	1	1953.926091	0	0.999917	1	1953.926042	+1	4500
4600	1.000027	0	1997.355539	−1	0.999918	2	1997.355491	+1	4600
4700	1.000027	1	2040.784986	0	0.999920	2	2040.784940	+1	4700
4800	1.000026	0	2084.214434	0	0.999922	1	2084.214389	+1	4800
4900	1.000026	1	2127.643882	0	0.999923	2	2127.643838	+1	4900
5000	1.000025$_0$		2171.073330		0.999925$_0$		2171.073287		5000

Für den konstanten Teil der Differenzen:

1	43429448.2
2	86858896.4
3	130288344.6
4	173717792.8
5	217147241.0
6	260576689.2
7	304006137.4
8	347435585.6
9	390865033.8

x	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}\,e^{-x}L_0(x)$	$\log \frac{1}{2}\sqrt{x}L_0(x)$	$\frac{1}{2}\sqrt{2\pi x}\,e^{-x}L_1(x)$	$\log \frac{1}{2}\sqrt{x}L_1(x)$	x
		434.294482		434.294482	
5000	1.000025_0	2171.073330	0.999925_0	2171.073287	5000
	4	-2	12	$+5$	
6000	1.000021	2605.367810	0.999937	2605.367774	6000
	3	-1	9	$+4$	
7000	1.000018	3039.662291	0.999946	3039.662260	7000
	2	-1	7	$+3$	
8000	1.000016	3473.956772	0.999953	3473.956745	8000
	2	-1	5	$+2$	
9000	1.000014	3908.251253	0.999958	3908.251229	9000
	2	-1	4	$+2$	
10000	1.000012	4342.545734	0.999962	4342.545713	10000
	1	0	4	$+1$	
11000	1.000011	4776.840216	0.999966	4776.840196	11000
	1	-1	3	$+1$	
12000	1.000010	5211.134697	0.999969	5211.134679	12000
	0	0	2	$+1$	
13000	1.000010	5645.429179	0.999971	5645.429162	13000
	1	0	2	$+1$	
14000	1.000009	6079.723661	0.999973	6079.723645	14000
	1	-1	2	$+1$	
15000	1.000008	6514.018142	0.999975_0	6514.018128	15000
	0	0	2	0	
16000	1.000008	6948.312624	0.999977	6948.312610	16000
	1	0	1	$+1$	
17000	1.000007	7382.607106	0.999978	7382.607093	17000
	0	-1	1	0	
18000	1.000007	7816.901587	0.999979	7816.901575	18000
	0	0	1	$+1$	
19000	1.000007	8251.196069	0.999980	8251.196058	19000
	1	0	1	0	
20000	1.000006	8685.490551	0.999981	8685.490540	20000

Für den konstanten Teil der Differenzen:

1	4342944851.9
2	868588963.8
3	1302883445.7
4	1737177927.6
5	2171472409.5
6	2605766891.4
7	3040061373.3
8	3474355855.2
9	3908650337.1

x	$\lg 2\pi x e^{-x} I_0(x)$		$\log \lg x L_0(x)$		$\lg 2\pi x e^{-x} I_1(x)$		$\log \lg x I_1(x)$		x
			4342.944819				4342.944819		
20000	1.000006	2	8685.490551	−1	0.999981	6	8685.490540	+3	20000
30000	1.000004	1	13028.435369	−1	0.999987	4	13028.435362	+1	30000
40000	1.000003	0	17371.380187	0	0.999991	1	17371.380182	+1	40000
50000	1.000003	1	21714.325006	0	0.999992	2	21714.325002	0	50000
60000	1.000002	0	26057.269825	0	0.999994	1	26057.269821	+1	60000
70000	1.000002	0	30400.214644	0	0.999995	0	30400.214641	0	70000
80000	1.000002	1	34743.159463	0	0.999995	1	34743.159460	0	80000
90000	1.000001	0	39086.104282	0	0.999996	0	39086.104279	+1	90000
100000	1.000001	0	43429.049101	0	0.999996	1	43429.049099	0	100000
110000	1.000001	0	47771.993920	0	0.999997	0	47771.993918	0	110000
120000	1.000001	0	52114.938739	0	0.999997	0	52114.938737	0	120000
130000	1.000001	0	56457.883558	0	0.999997	0	56457.883556	0	130000
140000	1.000001	0	60800.828377	0	0.999997	1	60800.828375	0	140000
150000	1.000001	0	65143.773196	0	0.999998	0	65143.773194	+1	150000
160000	1.000001	0	69486.718015	0	0.999998	0	69486.718014	0	160000
170000	1.000001	0	73829.662834	0	0.999998	0	73829.662833	0	170000
180000	1.000001	0	78172.607653	0	0.999998	0	78172.607652	0	180000
190000	1.000001	0	82515.552472	0	0.999998	0	82515.552471	0	190000
200000	1.000001		86858.497291		0.999998		86858.497290		200000

Für den konstanten Teil der Differenzen:

1	4342944819.0
2	8685889638.0
3	13028834457.0
4	17371779276.0
5	21714724095.0
6	26057668914.0
7	30400613733.0
8	34743558552.0
9	39086503371.0

x	$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_0(x)$	$\log\sqrt{x}L_0(x)$	$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1(x)$	$\log\sqrt{x}L_1(x)$	x
		43429.448190		43429.448190	
200000	1.000001	86858.497291	0.999998	86858.497290	200000
	1	0	1	0	
300000	1.000000	130287.945481	0.999999	130287.945480	300000
	0	0	0	+1	
400000	1.000000	173717.393671	0.999999	173717.393671	400000
	0	+1	0	0	
500000	1.000000	217146.841862	0.999999	217146.841861	500000
	0	0	0	+1	
600000	1.000000	260576.290052	0.999999	260576.290052	600000
	0	0	0	0	
700000	1.000000	304005.738242	0.999999	304005.738242	700000
	0	+1	1	0	
800000	1.000000	347435.186433	1.000000	347435.186432	800000
	0	0	0	+1	
900000	1.000000	390864.634623	1.000000	390864.634623	900000
	0	0	0	0	
1000000	1.000000	434294.082813	1.000000	434294.082813	1000000

Von hier ab ist:

$$\sqrt{2\pi x}e^{-x}L_0(x) = \sqrt{2\pi x}e^{-x}L_1(x) = 1.000000$$

$$\log\sqrt{x}L_0(x) = \log\sqrt{x}L_1(x) = x\cdot\log e + 9.600910 - 10$$

wobei:

$1\cdot\log e = 0.434\ 294\ 481\ 903\ 251\ 827\ 65$	$6\cdot\log e = 2.605\ 766\ 891\ 419\ 510\ 965\ 91$
$2\cdot\log e = 0.868\ 588\ 963\ 806\ 503\ 655\ 30$	$7\cdot\log e = 3.040\ 061\ 373\ 322\ 762\ 793\ 56$
$3\cdot\log e = 1.302\ 883\ 445\ 709\ 755\ 482\ 95$	$8\cdot\log e = 3.474\ 355\ 855\ 226\ 014\ 621\ 21$
$4\cdot\log e = 1.737\ 177\ 927\ 613\ 007\ 310\ 60$	$9\cdot\log e = 3.908\ 650\ 337\ 129\ 266\ 448\ 86$
$5\cdot\log e = 2.171\ 472\ 409\ 516\ 259\ 138\ 26$	

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig

QA
408
A64
Anding, Ernst
Sechsstellige Tafeln der Bessel'schen Funktionen imaginären Argumentes

Physical & Applied Sci.

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY